

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Gediminas BLAŽEVIČIUS

# PRISITAIKOMUMO TEORIJS PLĖTOTĖ OPTIMIZUOJANT PLIENINES KONSTRUKCIJAS

DAKTARO DISERTACIJA

TECHNOLOGIJOS MOKSLAI,  
STATYBOS INŽINERIJA (02T)



Vilnius LEIDYKLA TECHNICA 2015

Disertacija rengta 2011–2015 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.

### **Mokslinis vadovas**

prof. habil. dr. Juozas ATKOČIŪNAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

### **Pirmininkas**

prof. dr. Antanas ŠAPALAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

### **Nariai:**

prof. habil. dr. Rimantas BARAUSKAS (Kauno technologijos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T),

prof. habil. dr. Rimantas KAČIANAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. dr. Zdenek KALA (Brno technologijos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. dr. Arnoldas NORKUS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Disertacija bus ginama viešame Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje **2015 m. lapkričio 30 d. 14 val.** Vilniaus Gedimino technikos universiteto Senato posėdžių salėje.

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.

Tel.: (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112; el. paštas doktor@vgtu.lt

Pranešimai apie numatomą ginti disertaciją išsiųsti 2015 m. spalio 29 d.

Disertaciją galima peržiūrėti VGTU talpykloje <http://dspace.vgtu.lt> ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekoje (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva).

VGTU leidyklos TECHNIKA 2349-M mokslo literatūros knyga

ISBN 978-609-457-860-1

© VGTU leidykla TECHNIKA, 2015

© Gediminas, Blaževičius, 2015

*gediminas.blazevicius@vgtu.lt*

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Gediminas BLAŽEVIČIUS

# EXTENDED SHAKEDOWN THEORY ON OPTIMIZATION OF STEEL STRUCTURES

DOCTORAL DISSERTATION

TECHNOLOGICAL SCIENCES,  
CIVIL ENGINEERING (02T)



Vilnius LEIDYKLA TECHNICA 2015

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2011–2015.

### **Scientific Supervisor**

Prof. Dr Habil Juozas ATKOČIŪNAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The Dissertation Defence Council of Scientific Field of Civil Engineering of Vilnius Gediminas Technical University:

### **Chairman**

Prof. Dr Antanas ŠAPALAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

### **Members:**

Prof. Dr Habil Rimantas BARAUSKAS (Kaunas University of Technology, Mechanical Engineering – 09T),

Prof. Dr Habil Rimantas KAČIANAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T),

Prof. Dr Zdenek KALA (Brno University of Technology, Civil Engineering – 02T),

Prof. Dr Arnoldas NORKUS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defence Council of Civil Engineering in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at **2 p. m. on 30 November 2015**.

Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.

Tel.: +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112; e-mail: doktor@vgtu.lt

A notification on the intend defending of the dissertation was send on 29 October 2015.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at the VGTU repository <http://dspace.vgtu.lt> and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania).

# Reziumė

Disertacijoje nagrinėjamų temų atsiradimą paskatino didėjanti statybinių konstrukcijų projektavimo sparta ir dėl to kylantis naujų bei efektyvių kompiuterinių projektavimo metodikų poreikis. Šiuolaikinėje statinių projektavimo praktikoje gausu sudėtingos architektūrinės raiškos, lengvųjų plieninių konstrukcijų, kurias būtina projektuoti integraliai, neskaidant atskirais elementais. Integralus konstrukcijos projektavimas leidžia taikyti optimizavimo algoritmus, kurie sudaro galimybių rasti geriausią tvaraus, patikimo ir medžiagų atžvilgiu ekonomiško statinio konstrukcinį sprendinį. Disertacijoje parodoma, kad optimizacija gali suteikti esminį pranašumą siekiant projektuoti plienines konstrukcijas kuo efektyviau laiko ir materialinių išteklių atžvilgiu.

Svarbus postūmis plieninių konstrukcijų projektavimo srityje pastaraisiais dešimtmečiais yra standartais įteisintas tampriosios plastinės medžiagos būsenos išnaudojimas. Tokiu atveju tam tikroms konstrukcijos vietoms leidžiama pasiekti plieno takumo įtempius. Plastiškumo teorijos prielaidas sujungus su optimalaus sprendinio paieškos algoritmu, galima pastebimai sumažinti projektuojamos konstrukcijos tūrį (masę), o kartu ir kainą. Tačiau pereinant prie tampriųjų plastinių konstrukcijų projektavimo, susiduriama su fundamentalia problema – būtina tiksliai žinoti konstrukciją veikiančias išorines jėgas ir jų veikimo seką. Įsivaizduojant statybinę konstrukciją, veikiamą nenuspėjamai kintančių atmosferos poveikių ir žmonių sukeliamų apkrovų, galima tik apytiksliai įvertinti tokių jėgų kitimo ribas, bet ne konkrečią veikimo istoriją. Teorinį tokios problemos sprendinį jau prieš pusšimtį metų pasiūlė prisitaikomumo teorija, leidžianti vienareikšmiškai nustatyti, ar kintamosios kartotinės apkrovos veikiamos konstrukcijos saugos ir tinkamumo ribiniai būviai nebus pasiekti.

Prisitaikomumo teorijos sprendiniams rasti būtini optimizavimo algoritmai, kurių netobulumai iki šiol stipriai riboja tokios metodikos taikymą (taip pat ir didelių kompiuterinių išteklių poreikis). Šiuolaikinės technologijos suteikia galimybių sujungti prisitaikomumo teoriją, optimizaciją ir vis didėjančius standartizuotus projektavimo reikalavimus į vientisą uždavinį. Tai nėra trivialus uždavinys, nes šiuolaikiniai Europos standartai nustato labai konkrečius reikalavimus elementų stiprumui, stabilumui, deformatyvumui ir galiausiai bendrajam patikimumui. Tokių reikalavimų derinimas su korektiška plastine konstrukcijos elgsena bei visa tai sujungiančių optimizavimo uždavinių plėtotė plieninėms konstrukcijoms ir yra šios disertacijos tikslas. Joje sukurtos teorinės ir praktinės konkrečių statybinių konstrukcijų – santvarų, rėmų, plokščių – optimizavimo prisitaikomumo stadijoje formuluotės (remiantis ekstreminiais energiniais principais, baigtinių elementų metodu ir matematiniu programavimu), pateikti skaitinių eksperimentų rezultatai, suformuluotos išvados ir pasiūlymai.

# Abstract

This doctoral thesis was inspired by the acceleration of the designing process of civil structures, which calls for new and effective computer-based designing methods. Modern design practice often features lightweight steel structures with complex architectural expression, which has to be designed integrally, without elemental decomposition. Integrated structural design uses optimization algorithms, which allows for finding the best structural solution for a sustainable, reliable and material-wise economical project. This PhD thesis demonstrates that optimization can present a substantial advantage for designing steel structures more efficiently both in terms of time and material resources.

An important shift in structural steel design over the recent decades has been the standard-based legitimisation of design in the elastic-plastic material state – when particular places in the structure are allowed to reach the yield stress point. Combining the principles of the plasticity theory and the optimal solution search algorithms allows for a considerable reduction of the volume (or mass) of structures and therefore means lower cost. However, the transition to the elastic-plastic structural design raises a fundamental problem – the exact loading history of a structure has to be known in advance. Having in mind real-life structures subjected to unpredictable atmospheric impacts and moving human-caused live loads, only an approximate estimation of load variation limits, rather than exact loading history, may be defined. A solution to this problem was provided by the shakedown theory half a century ago. The theory allows determining whether or not the limit state of a structure subjected to cyclic loading will be reached.

A lack of effective optimisation algorithms (as well as the need of high computer resources), which are needed to find solutions of the shakedown theory, was a holdback for a successful implementation of the theory in practice. Modern technology allows conjoining shakedown theory, optimization and ever stricter standardised design requirements in a single problem formulation. This poses a complex problem as contemporary European standards define very specific requirements of strength, stability, deformability and overall reliability of structural elements. A development of research on optimisation issues, which includes standard requirements with a combination of an adequate definition of plastic structural behaviour of steel structures, is the objective of this thesis. This work contains theoretical as well as practical formulations of optimal shakedown design problems for particular building structures – trusses, frames and circular plates. Mathematical formulations are based on energy principles, finite element method and mathematical programming. The thesis includes multiple numerical results as well as conclusions and suggestions.

---

# Žymėjimai

## Skaliarai

- $\mu$  – statiškaiai leidžiamas prisitaikomumo daugiklis;
- $f_y$  – plieno takumo įtempis;
- $K$  – cilindrinis standis;
- $E$  – efekto (apkrovos) funkcija arba tamprumo (Jungo) modulis;
- $R$  – atspario funkcija arba plokštės spindulys;
- $Z$  – atspario atsargos funkcija;
- $Q$  – skersinė jėga;
- $t$  – laikas arba elemento storis;
- $\alpha$  – tikimybė;
- $\beta$  – patikimumo indeksas;
- $\sigma$  – vidutinė kvadratinė nuokrypa;
- $\rho$  – cilindrinės koordinačių sistemos globalioji radialinė koordinatė;
- $\xi$  – cilindrinės koordinačių sistemos lokalią radialinė koordinatė;
- $W$  – skerspjūvio atsparumo momentas;
- $A$  – skerspjūvio plotas;

## Matricos

- $A$  – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica;  
 $A^{(1)}, A^{(2)}$  – pusiausvyros lygčių matricos pamatricės;  
 $B$  – Žordano transformacijos (pertvarkymo) matrica;  
 $d$  – elemento pasidavimo matrica;  
 $D$  – konstrukcijos pasidavimo matrica;  
 $G$  – liekamųjų įrašų influentinė matrica;  
 $H$  – liekamųjų poslinkių influentinė matrica arba baigtinio elemento įrašų interpoliacinė matrica;  
 $\Pi$  – von Mizeso takumo sąlygos matrica arba stiprumo sąlygų konfigūracijos matrica;  
 $\Phi$  – takumo sąlygų matrica;  
 $\alpha$  – tampriųjų įrašų influentinė matrica;  
 $\beta$  – tampriųjų poslinkių influentinė matrica;  
 $N$  – algebrinis operatorius;  
 $\nabla$  – diferencialinis operatorius.

## Vektoriai

- $A_p$  – elementų skerspjūvio plotų vektorius;  
 $F_{\text{inf}}, F_{\text{sup}}$  – jėgų kitimo apatinių ir viršutinių ribų reikšmių vektoriai;  
 $L$  – konstrukcijos elementų ilgių vektorius;  
 $M$  – lenkimo momentų vektorius;  
 $N$  – ašinių jėgų vektorius;  
 $P_k$  – baigtinio elemento vidinių jėgų vektorius;  
 $r$  – reakcijų intensyvumų vektorius;  
 $S$  – konstrukcijos suminių įrašų vektorius;  
 $S_r$  – liekamųjų įrašų vektorius;  
 $S_e$  – tampriųjų įrašų vektorius;  
 $S_0$  – ribinių įrašų vektorius;  
 $u$  – suminių poslinkių vektorius;  
 $u_r$  – liekamųjų poslinkių vektorius;  
 $u_e$  – tampriųjų poslinkių vektorius;



$\dot{u}$  – poslinkių greičių vektorius;  
 $\varphi$  – takumo sąlygų reikšmių vektorius  
 $\theta$  – deformacijų vektorius;  
 $\lambda$  – plastinių daugiklių vektorius;  
 $\dot{\lambda}$  – plastinių daugiklių greičių vektorius;  
 $\sigma$  – įtempių vektorius.

## Indeksai

$0$  – ribinis dydis (ribojanti skerspjūvio galią įrašą);  
 $cr$  – susietas su klupumo įvertinimu;  
 $st$  – susietas su stiprumo įvertinimu;  
 $Rd$  – skaičiuojamasis atsparis pagal Europos normas;  
 $Ed$  – skaičiuojamasis efektas pagal Europos normas;  
 $e$  – tamprusis;  
 $r$  – liekamasis;  
 $p$  – plastinis;  
 $k$  – baigtinio elemento indeksas;  
 $j$  – įrašų hodografo viršūnė;  
 $\rho$  – radialinis;  
 $\theta$  – tangentinis.

## Santrumpos

KKA – kintamoji kartotinė apkrova;  
EN – Europos normos (eurokodas).



---

# Turinys

IVADAS .....	1
Problemos formulavimas.....	1
Darbo aktualumas.....	1
Tyrimų objektas.....	2
Darbo tikslas.....	2
Darbo uždaviniai .....	2
Tyrimų metodika .....	2
Darbo mokslinis naujumas .....	3
Darbo rezultatų praktinė reikšmė .....	3
Ginamieji teiginiai.....	3
Darbo rezultatų aprobavimas.....	4
Disertacijos struktūra.....	4
1. PRISITAIKOMUMO ANALIZĖ VEIKIANT DAUGIADIMENSEI APKROVAI: ISTORIJA IR ŠIUOLAIKINIAI TYRIMAI .....	5
1.1. Bendros pastabos apie tyrimo objektą.....	6
1.2. Pagrindinės prisitaikomumo teorijos teoremos .....	13
1.2.1. Dualus Melano ir Koiterio teoremų ryšys.....	13
1.2.2. Istorinis Melano ir Koiterio teoremų kontekstas.....	15
1.3. Šiuolaikinės prisitaikomumo teorijos taikymo kryptys .....	19
1.3.1. Bendrieji pastebėjimai .....	19
1.3.2. Geometriniai efektai, medžiagų ir konstrukcijų įvairovė.....	19

1.3.3. Prisitaikiosios konstrukcijos poslinkių nustatymas.....	22
1.3.4. Matematinis programavimas optimizuojant prisitaikančias konstrukcijas.....	24
1.4. Iteracinė konstrukcijų analizė.....	29
1.4.1. Bendros pastabos apie inkrementinę analizę.....	29
1.4.2. Energinis principas grįžimo atvaizdavimo metodikoje.....	31
1.4.3. Geometrinis principas grįžimo atvaizdavimo metodikoje.....	32
1.5. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas.....	37
<b>2. PRISITAikomumo TEORIJS PLĖTOTĖ DISKRETIZUOTOMS KONSTRUKCIJOMS .....</b>	<b>39</b>
2.1. Bendrosios prisitaikančių diskretizuotų sistemų lygtys ir priklausomybės .....	40
2.1.1. Tampriosios diskretinės sistemos įrašos ir deformacijos .....	40
2.1.2. Tampriosios plastinės diskretinės sistemos priklausomybės.....	42
2.2. Konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvio analizės uždavinys .....	44
2.3. Influentinės liekamųjų įrašų ir liekamųjų poslinkių matricos .....	46
2.4. Prisitaikomumo būvio optimizavimo uždaviniai.....	48
2.4.1. Bendroji optimizavimo uždavinio prisitaikomumo sąlygomis formuluotė.....	48
2.4.2. Transformuoti optimizavimo uždavinių modeliai.....	50
2.4.3. Optimizavimo uždavinys tiesinių takumo sąlygų atveju.....	53
2.5. Projektavimų standartų taikymas optimizuojant konstrukcijas .....	54
2.5.1. Elementų klupumo įvertinimas .....	54
2.5.2. Eurokodo stiprumo sąlygos rėminėms konstrukcijoms .....	56
2.5.3. Poslinkių ribojimai pagal eurokodą .....	58
2.6. Antrojo skyriaus išvados .....	59
<b>3. SKAITINIAI STRYPINIŲ KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMO EKSPERIMENTAI .....</b>	<b>61</b>
3.1. Santvarų tūrio optimizavimas su klupumo ir poslinkių ribojimais .....	62
3.2. Santvaros optimizavimas tiesioginiu tikimybinu metodu.....	68
3.3. Prisitaikančios konstrukcijos optimizavimas inkrementiniu-iteratyviniu metodu .....	76
3.5. Rėminių konstrukcijų optimizavimas pagal eurokodo reikalavimus .....	82
3.6. Trečiojo skyriaus išvados .....	88
<b>4. KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMAS NAUDOJANT NETIESINĮ TAKUMO KRITERIJŲ.....</b>	<b>91</b>
4.1. Apvalios simetrinės plokštės diskretizacija.....	92
4.2. Plokštės optimizavimas taikant von Mizeso takumo kriterijų .....	95
4.3. Plokštės optimizavimas taikant integralinį von Mizeso takumo kriterijų.....	97
4.4. Ketvirtąjo skyriaus išvados .....	103
<b>BENDROSIOS IŠVADOS .....</b>	<b>105</b>
<b>LITERATŪRA .....</b>	<b>107</b>

AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS	119
SUMMARY IN ENGLISH.....	121
PRIEDAI <sup>1</sup> .....	137
A priedas. Santvaros optimizavimo programinis kodas .....	139
B priedas. Rėmo optimizavimo programinis kodas.....	155
C priedas. Plokštės optimizavimo programinis kodas .....	171
D priedas. Bendraautorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą medžiagą mokslo daktaro disertacijoje.....	181
E priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos .....	187

---

<sup>1</sup> Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje



---

# Contents

INTRODUCTION .....	1
Problem formulation .....	1
Relevance of the thesis .....	1
Research object .....	2
Aim of the thesis .....	2
Objectives of the thesis.....	2
Research methodology .....	3
Scientific novelty of research findings .....	3
Practical value of research findings.....	3
Defended statements .....	4
Approval of research findings .....	4
Structure of the thesis .....	4
1. SHAKEDOWN ANALYSIS UNDER MULTIDIMENSIONAL LOADING:	
HISTORY AND STATE OF THE ART .....	5
1.1. General remarks on the research object.....	6
1.2. General theorems of shakedown .....	13
1.2.1. Dual relation between Koiter and Melan shakedown theorems .....	13
1.2.2. Historical background of Koiter and Melan theorems .....	15
1.3. State of the art applications of shakedown theory .....	19
1.3.1. General observations.....	19

1.3.2. Geometric nonlinearity, diversity of materials and structures .....	19
1.3.3. Determination of displacements at shakedown.....	22
1.3.4. Mathematical programming for shakedown optimization .....	24
1.4. Iterative analysis of structures .....	29
1.4.1. General observations on incremental analysis .....	29
1.4.2. Energy principle in return mapping methodology .....	31
1.4.3. Geometric principle in return mapping methodology .....	32
1.5. Conclusions of Chapter 1 and formulation of the objectives.....	37
 2. EXTENDED SHAKEDOWN THEORY ON THE DISCRETISED STRUCTURES .....	 39
2.1. General equations and dependancies of discrete structures at shakedown .....	40
2.1.1. Deformations and internal forces of an elastic discrete system .....	40
2.1.2. Equations of an elastic-plastic discrete system .....	42
2.2. Analysis problem of the stress-strain state of a structure .....	44
2.3. Influence matrices of residual forces and residual displacements .....	46
2.4. Optimal shakedown design problems.....	48
2.4.1. General formulation of an optimal shakedown design problem .....	48
2.4.2. Transformed models of optimization problems .....	50
2.4.3. Optimal shakedown design problem in case of linear yield conditions ....	53
2.5. Application of design standard requirements in optimization problems .....	54
2.5.1. Evaluation of element buckling .....	54
2.5.2. Eurocode strength conditions for framed structures .....	56
2.5.3. Displacement constraints according to eurocode.....	58
2.6. Conclusions of Chapter 2 .....	59
 3. NUMERICAL EXPERIMENTS OF BAR STRUCTURE OPTIMIZATION.....	 61
3.1. Truss volume optimization with stability and displacement constraints .....	62
3.2. Direct probability-based optimal truss design .....	68
3.3. Incremental-iterative optimal shakedown design method .....	77
3.5. Frame optimization according to eurocode .....	82
3.6. Conclusions of Chapter 3 .....	88
 4. STRUCTURAL OPTIMIZATION WITH NONLINEAR YIELD CRITERION .....	 91
4.1. Discretization of a symetric circular plate .....	92
4.2. Plate optimization with von Mises yield criterion .....	95
4.3. Plate optimization with von Mises yield criterion of the mean .....	98
4.4. Conclusions of Chapter 4 .....	103
 GENERAL CONCLUSIONS .....	 105
 REFERENCES .....	 107
 LIST OF SCIENTIFIC PUBLICATIONS BY THE AUTHOR ON THE TOPIC OF THE DISSERTATION.....	 119



SUMMARY IN ENGLISH.....	121
ANNEXES <sup>1</sup> .....	137
Annex A. Programing code of truss optimization .....	139
Annex B. Programing code of frame optimization.....	155
Annex C. Programing code of plate optimization .....	171
Annex D. Agreements of co-authors to provide published material in the thesis ..	181
Annex E. Copies of scientific publications by the author on the topic of the thesis..	187

---

<sup>1</sup> The annexes are supplied in the attached compact disc



---

# Išvadas

## Problemos formulavimas

Prisitaikomumo teorija, fundamentaliai pagrįsta XX a. viduryje ir teoriškai turinti labai platų pritaikymą, iki šiol nėra įdiegta į plieninių statybinių konstrukcijų projektavimo praktiką. Tai, kad šios teorijos sprendiniai yra standartizuoti ir sėkmingai taikomi kitose mechanikos srityse, leidžia tikėtis jos sėkmingos plėtotės ir statybos inžinerijoje. Siekiant šio tikslo būtina mažinti atotrūkį tarp apibendrintų teorinių prisitaikomumo sprendinių ir šiuolaikinio projektavimo pagrindą sudarančių eurokodo standartų. Prisitaikomumo teorija sudaro galimybių veiksmingai projektuoti lengvasias, pasikartojančių apkrovų veikiamas šiuolaikines plienines konstrukcijas. Optimizavimas esant prisitaikomumo būviui leidžia parengti pačius ekonomiškiausius tokių konstrukcijų projektus ir mažinti statybos kainas. Visus šiuos tikslus turi perteikti nauji skaičiavimo metodai, kurių plėtotė iki šiol nėra pakankama.

## Darbo aktualumas

Optimizavimu grindžiamų prisitaikomumo uždavinių naudojimas ilgą laiką buvo apribotas kompiuterinių technologijų galimybių. Tačiau, spartėjant netiesinių optimizavimo uždavinių sprendimui, inžinieriai įgyja galimybių taikyti

optimizacija pagrįstus metodus rengdami praktinius projektus. Todėl būtina kurti naujas skaičiavimo metodikas, kurios atitiktų vis spartėjantį projektavimą ir sudėtingos architektūrinės raidos konstrukcijų realizavimą. Disertacijoje parodyta, kaip prisitaikomumo teorija taikoma realių konstrukcijų optimalaus projektavimo uždaviniams spręsti, o jos taikymas sukuria galimybių projektuoti ekonomiškesnes statinių konstrukcijas.

## **Tyrimų objektas**

Tyrimų objektas – šiuolaikinė prisitaikomumo teorija ir jos sąsajos su galiojančiais plieninių konstrukcijų projektavimo standartais.

## **Darbo tikslas**

Darbo tikslas – sukurti naujus prisitaikomumo teorijos metodus plieninių konstrukcijų optimizavimui, įvertinant eurokodo saugos ir tinkamumo ribinių būvių reikalavimus.

## **Darbo uždaviniai**

1. Ištirti egzistuojančius prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematinius modelius ir nustatyti jų privalumus bei trūkumus.
2. Integruoti į optimizavimo uždavinius plieninių konstrukcijų projektavimo standartų reikalavimus ir sieti juos su konkrečių elementų fizine elgsena.
3. Optimizavimo uždaviniuose suderinti eurokodo standarte taikomus skirtingus patikimumo lygmenis konstrukcijų tinkamumo ir saugos ribiniams būviams.
4. Papildyti optimizavimo uždavinius elementų klupumo ribojimais ir korektiškai įvertinti tokių elementų įtaką plastiniam konstrukcijos deformavimuisi.
5. Sukurtas metodikas išbandyti skaitiškai ir įvertinti jų pritaikymo efektyvumą.

## **Tyrimų metodika**

Tyrimai atlikti remiantis plastiškumo teorijos, matematinio programavimo ir optimizavimo metodų integracija. Kuriami skaičiavimo metodai grindžiami praktinių statybinių konstrukcijų projektavimo reikalavimų realizavimu naudojantis

trimis minėtomis disciplinomis. Glaudžiai siejami matematiniai algoritmai, fizinė konstrukcijų elgsenos interpretacija ir empiriniais matavimais pagrįsti projektavimo standartų reikalavimai. Tyrimai pradedami nuo matematinės klasikinių prisitaikomumo uždavinių analizės, į juos pamažu integruojami šiuolaikinio optimalaus projektavimo reikalavimai.

## **Darbo mokslinis naujumas**

Disertacijoje pirmą kartą prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinyje sujungiami EN stiprumo, klupumo, poslinkių ribojimo reikalavimai kartu su papildomais plastinės elgsenos ribojimais. Sukurtas tikslesnis ir praktiškesnis prisitaikomumo teorijos taikymas plieninėms konstrukcijoms projektuoti. Disertacijoje sukurtos metodikos leidžia didinti konstrukcijų projektavimo, esant plastinei stadijai, spartą, atsisakant varginančio iteracinio skaičiavimo ir kartu projektuoti optimalias konstrukcijas. Pasirinkto konstrukcijos parametro optimalumas leidžia sumažinti konstrukcijos kainą, o tuo pačiu mažinti jos poveikį aplinkai ir kurti tvarius statinius.

## **Darbo rezultatų praktinė reikšmė**

Disertacijoje pateiktos metodikos rodo prisitaikomumo uždavinių taikymo praktiniam plieninių konstrukcijų optimizavimui galimybes. Tolesnis jų vystymas ir taikymas realioms konstrukcijoms sukurtų galimybių paspartinti projektavimo procesus ir sutaupyti medžiagų, o kartu ir mažinti statybos kainą. Darbe pateiktosios uždavinių formuluotės ir prieduose esantys konkretūs programų tekstai gali būti panaudoti projektuojant ir tikrinant ekonomiškesnes konstrukcijas.

## **Ginamieji teiginiai**

1. Klasikinė prisitaikomumo teorija gali būti sėkmingai išplėsta ir pritaikyta optimalaus projektavimo uždaviniams.
2. Šiuolaikiniai projektavimo standartai gali būti suderinami su prisitaikančios plieninės konstrukcijos optimizavimo uždavinio formuluote.
3. Prisitaikomumo teorija pagrįsta konstrukcijų optimizacija padeda gauti ekonomiškiausią konstrukciją.
4. Sukurtos prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodikos leidžia įvertinti įvairios prigimties kintamųjų kartotinių apkrovų poveikius.

## Darbo rezultatų apibavimas

Disertacijos tema išspausdinti aštuoni moksliniai straipsniai: du „ISI Web of Science“ žurnaluose, turinčiuose citavimo rodiklį, trys tarptautinėse duomenų bazėse esančiuose mokslo žurnaluose, trys kituose recenzuojamuose mokslo leidiniuose (konferencijų straipsnių rinkiniuose). Išsamus publikacijų sąrašas pateiktas disertacijos pabaigoje.

Disertacijoje atliktų tyrimų rezultatai buvo aprobuoti septyniuose mokslinėse konferencijose Lietuvoje ir užsienyje:

- „Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijose“ 2011, 2012 ir 2013 m. Vilniuje;
- „Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos seminare“ 2012 m. Vilniuje;
- Tarptautinėje konferencijoje „Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology“ 2012 m. Dubrovniku, Kroatijoje;
- Tarptautinėje konferencijoje-kolokviume „EUROMECH - Colloquium 548, Direct and variational methods for nonsmooth problems in mechanics“, 2013 m. Amboise, Prancūzijoje;
- Tarptautinėje konferencijoje „Mechanika-2015“, 2015 m. Kaune.

## Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, keturi skyriai ir rezultatų apibendrinimas. Taip pat yra penki priedai. Darbo apimtis – 136 puslapiai, neskaitant priedų, tekste panaudotos 202 numeruotos formulės, 36 paveikslai ir 11 lentelių. Rašant disertaciją buvo panaudoti 166 literatūros šaltiniai.

---

## **Prisitaikomumo analizė veikiant daugiadimensei apkrovai: istorija ir šiuolaikiniai tyrimai**

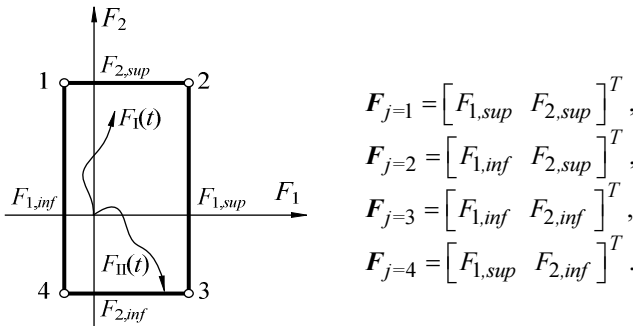
Optimizacija yra inžinerinių veiksmų programa, leidžianti mažinti konstrukcinių medžiagų poreikius ir didinti eksploatacines bei kokybines projektuojamų statybinių konstrukcijų charakteristikas. Visa tai glaudžiai susiję su siekiu priartinti plieninių konstrukcijų skaičiavimo prielaidas prie realių statinių elgsenos sąlygų, atsisakant tiesiškai tamprios medžiagos fizinio modelio ir vienkartės išorinės jėgos įvaizdžio. Šiame skyriuje atliekama analitinė literatūros disertacijos tematika apžvalga: nagrinėjama kartotinai apkraunamų tampriųjų plastinių prisitinkančių plieninių konstrukcijų optimizavimo, taikant ekstreminius energinius mechanikos principus, skaitiniai ir matematinio programavimo metodai. Ši apžvalga suponuoja darbo problematiką, aktualumą ir tikslus.

Skyriaus tema disertacijos autorius yra paskelbęs du straipsnius (Blaževičius, Atkočiūnas 2011; Atkočiūnas et al. 2015).

## 1.1. Bendros pastabos apie tyrimo objektą

Šio statybos inžinerijos krypties disertacinio darbo ištakos – šiuolaikinė plastiškumo teorija bei standartizuoto projektavimo pagal saugos ir tinkamumo ribinius būvius, nustatančius atitinkamus konstrukcijos patikimumo lygius, samprata. Disertacijoje taikomi statybinės mechanikos metodai grindžiami konstrukcijų diskretizavimu: pagrindinės lygtys ir priklausomybės užrašomos matricine forma (pirmajame skyriuje kai kurios klasikinės deformuojamo kūno mechanikos išraiškos dar bus pateiktos apibendrinta įtempių ir deformacijų erdvės forma, 1.2 pav.).

Statybinės konstrukcijos gali būti veikiamos vienkartinės ir kintamosios kartotinės apkrovos (KKA). Kintamąją kartotinę apkrovą  $F(t)$  suprantama jėgų ir poveikių, kintančių laike  $t$ , nepriklausomai vieniems nuo kitų, sistema. Laikoma, kad daugiadimensė apkrova  $F(t)$  yra kvazistatinė, t. y. dinaminiai efektai yra ignoruojami. Maksimalus  $F(t) = [F_1(t) \ F_2(t) \ \dots \ F_m(t)]^T$  vektoriaus komponentų skaičius yra lygus nagrinėjamos konstrukcijos diskretinio modelio laisvumo laipsniui  $m$ . Realioji apkrovimo istorija (konstrukcijos apkrovų veikimo seka laike) paprastai yra nežinoma, todėl laikomasi nuostatos, kad yra žinomos tik viršutinės  $F_{sup}$  ir apatinės  $F_{inf}$  apkrovos kitimo ribos:  $F_{inf} \leq F(t) \leq F_{sup}$ . Tuomet pagal šias ribas formuojami apkrovų kombinacijų vektoriai  $F_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ;  $p = 2^m$ ,  $j \in J$  ( $F_{inf} \leq F_j \leq F_{sup}$ ). 1.1 paveiksle parodyta kaip gaunamos keturios apkrovų kombinacijos 1, 2, 3, 4, nagrinėjant stačiakampę dviejų jėgų kitimo sritį.



1.1 pav. Galima jėgų  $F_1$  ir  $F_2$  kitimo sritis ( $j = 1, 2, 3, 4$  – srities viršūnės)

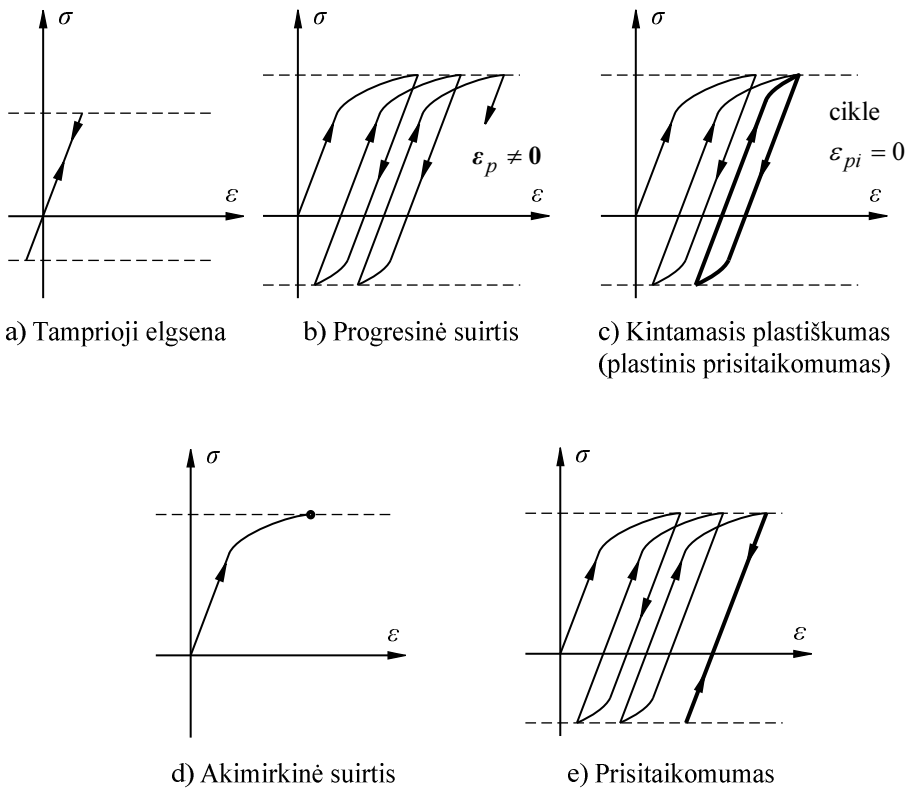
Fig. 1.1. Loading domain of forces  $F_1$  and  $F_2$  ( $j = 1, 2, 3, 4$  – apexes of the domain)



Tokiu būdu gauti vektoriai  $F_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  yra viena iš esminių prielaidų, kalbant apie prisitaikančių konstrukcijų projektavimą (Čyras, Atkočiūnas 1970; Atkočiūnas *et al.* 1981; Čyras 1983). Atskiros apkrovimo istorijos (iš begalės galimų), pavyzdžiui  $F_I(t)$ ,  $F_{II}(t)$  nėra nagrinėjamos (tai gali būti daroma taikant inkrementinę tampriųjų plastinių konstrukcijų analizę – apie ją bus kalbama vėliau). Apkrovų kombinacijų  $F_j$  taikymas leidžia išvengti apkrovimo istorijos nagrinėjimo, nustatant konstrukcijos saugos ribinį būvį KKA atveju.

Šiame disertaciniame darbe nagrinėjama ir plėtojama plieninių diskretinių konstrukcijų iš tampriosios plastinės medžiagos, kuriai galioja asociatyvinis plastinio tekėjimo dėsnis, skaičiavimo teorija visoms – tampriosios, tampriosios plastinės (prisitaikomumo) ir laikomosios galios praradimo – darbo stadijoms (kai veikia KKA). Pažymėtina, kad griežtai laikomasi prielaidos apie mažus poslinkius  $u$ , t. y. hipotezės apie tampriųjų  $\theta_e = DS_e$  ir suminių tampriųjų plastinių deformacijų  $\theta = DS + \theta_p$  mažumą (čia  $D$  – pasidavumo matrica,  $\theta_p$  – plastinės deformacijos). Apie konstrukcijų diskretizaciją išsamiai bus kalbama vėlesniuose skyriuose. Svarbu pabrėžti, kad idealiai tamprios plastinės konstrukcijos modelis nėra tobula ar vienintelė plastiškumo teorijos galimybių atskleidimo priemonė kintamosios kartotinės apkrovos atveju, ypač įvertinant konstrukcinių medžiagų įvairovę. Tačiau dvi aplinkybės pateisina tokio modelio pasirinkimą. Pirmoji – idealaus plastiškumo teorija yra santykinai paprasta, tačiau jau leidžianti modeliuoti liekamųjų deformacijų atsiradimą, ignoruojant tokius sudėtingus dalykus, kaip Baušingerio efektas ar medžiagos sustiprėjimas. Antroji aplinkybė – daugeliu praktikai svarbių atvejų medžiagos idealaus plastiškumo modelis gan tiksliai aprašo realių konstrukcijų elgseną (ypač esant ekstreminiams apkrovų kitimo diapazonams, kurie ir nagrinėjami prisitaikomumo analizėje).

Tęsiant bendras pastabas apie disertacinio darbo objektą, toliau aptariama tampriųjų plastinių konstrukcijų prisitaikomumo samprata. Stabili plieninė konstrukcija deformuojama tampriai, o KKA atveju jos stiprumą nusako konstrukcijos medžiagos nuovargio charakteristikos, suirimas įvyksta tik po didelio apkrovimo ir nukrovimo ciklų skaičiaus ( $\sigma - \varepsilon$  diagrama, 1.2 pav., a). Tuo atveju, kai plieninėje konstrukcijoje, veikiamoje KKA, atsiranda plastinių deformacijų, įmanoma ciklinė plastiškoji suirtis (1.2 pav., b, c) net ir tuo atveju, kai apkrova yra mažesnė už ribinę (kai  $F(t)$  jėgų grupėje net nėra apkrovų komponentų derinio, sukeliančio akimirkinę suirtį, 1.2 pav., d). Idealiai tampri plastinė konstrukcija, veikiamą kintamosios kartotinės apkrovos, suyra arba dėl per didelių plastinių deformacijų sankaupų (vadinamoji progresyvinė suirtis, 1.2 pav., b) arba dėl plastinio (mažaciklio) nuovargio (1.2 pav., c).



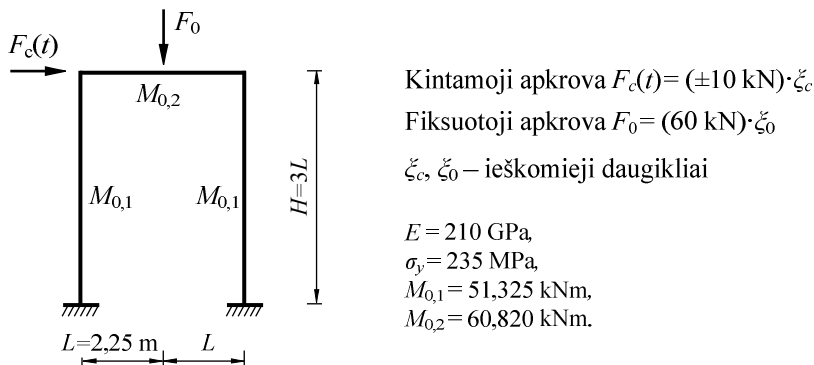
1.2 pav. Tamprioji plastinė konstrukcijų elgsena

Fig. 1.2. Elastic plastic response of a structure

Ciklinė plastiškoji suirtis neįvyksta tada ir tik tada, kai plastinis tekėjimas  $\dot{\varepsilon}_p$ , atsiradęs pradiniuose apkrovimo cikluose, vykstant vėlesniam apkrovimui, nebeatsinaujina, t. y.  $\dot{\varepsilon}_p = 0$  – toliau plastinės deformacijos neplinta, nesivysto. Tai įmanoma tada, kai plastinės deformacijos nulemia liekamųjų įtempių  $\sigma_r$  atsiradimą, kurių suma su vėlesnių KKA ciklų sukeltais pseudotampriaisiais įtempiais  $\sigma_e$  nė viename konstrukcijos taške nepažeidžia įtempių leistinumo sąlygų. Sakoma, kad tampriai plastinė konstrukcija *prisitaikė* prie liekamųjų deformacijų  $\varepsilon_r$  ir jas atitinkančių liekamųjų įtempių  $\sigma_r$ , t. y. sistema prisitaikė prie duotosios KKA  $F(t)$ . Konkreti konstrukcija, priklausomai nuo ją veikiančios apkrovos kitimo ribų, gali patirti bet kurį iš 1.2 paveiksle aptartų tamprųjų plastinių būvių. Visos galimos konstrukcijos elgsenų sritys gali būti pavaizduotos

grafiškai vadinamąja Bree diagrama. Tokios diagramos pirmą kartą buvo sudarytos Bree (Bree 1967), o vėliau išplėtotos Karadeniz (Karadeniz *et al.* 1987). Maier (Maier *et al.* 1993) jas įvardijo Bruselio diagramomis. Tokia diagrama gali būti sudaroma naudojant kelių optimizavimo uždavinių sprendinius, gautus keičiant apkrovimo variantus ir jų eiliškumą.

Šiame poskyryje, pamažu atskleidžiant tyrimo objekto savybes, Bree dvi-  
matė diagrama sudaroma nagrinėjant lenkiamą rėmą veikiančią fiksuotą (nekin-  
tamą) ir kintamąją kartotinę apkrovą (1.3 pav.). Diagramos taškai ant kintamųjų  
ašių gaunami sprendžiant apkrovos optimizavimo uždavinį tik su vieno tipo ap-  
krova: ieškant maksimalaus daugiklio fiksuotai apkrovai, randama staigios suir-  
ties riba, o ieškant tik KKA daugiklio, gaunamas prisitaikomumo daugiklis,  
reiškiantis kintamąjį plastiškumą arba progresyviąją suirtį (jei plastinės defor-  
macijos cikle nenulinės). Tampriosios zonos ribos randamos didinant apkrovą  
iki pirmųjų plastinių deformacijų atsiradimo (arba ribinė įraša dalijama iš vei-  
kiančios nuo vienetinės jėgos). Tiesių susikirtimo taškus galima gauti taip pat –  
pasirenkant vieną žinomą daugiklį ir ieškant kito.

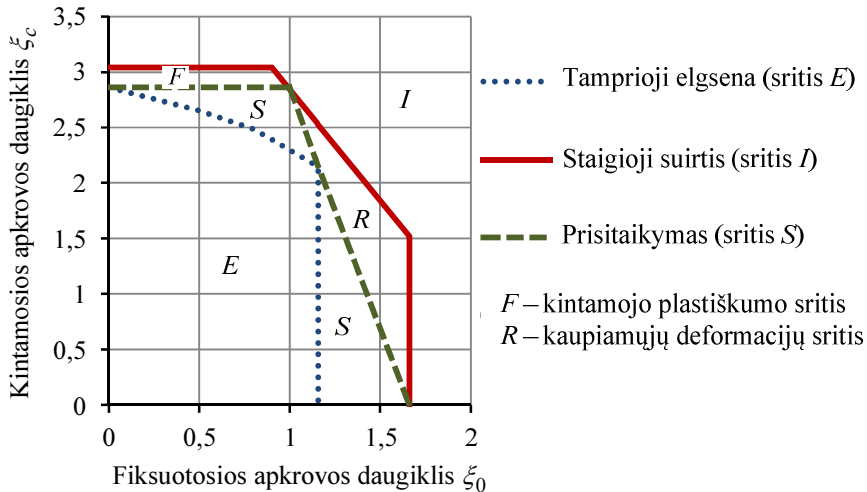


**Fig. 1.3.** Portal frame subjected to fixed and cyclic loads

Nagrinėjamo pavyzdžiui (1.4 pav.) diagramos apibrėžtos sritys yra apribotos tiesėmis, nes naudojamos tiesinės takumo sąlygos. Tačiau, tai nėra taisyklė ir Bree diagramos sritys gali būti apibrėžtos ir kreivėmis priklausomai nuo konkrečios konstrukcijos ir naudojamų takumo sąlygų (Benfratello *et al.* 2013).

Bree diagrama rodo, kokia svarbi apkrovimo istorija, nustatant tampriosios plastinės konstrukcijos tikruosius įtempių ir deformacijų būvius. Taigi, ar įvyks konstrukcijos prisitaikomumas, galima išsiaiškinti nagrinėjant ir apkrovimo procesą laike  $t$ . Disertacijoje šis metodas taikomas santvarai, veikiamai judančios apkrovos (tai yra atskiras KKA atvejis). Tačiau metodas reikalauja daug darbo ir pastangų, o apkrovoms, artimoms ribinėms, jis yra tiesiog praktiškai

nepritaikomas (apie tai išsamiau bus kalbama 1.4 poskyryje). Suprantama, toks inkrementinis nagrinėjimas galimas tik nesudėtingoms konstrukcijoms.



**1.4 pav.** Portalinio rėmo Bree diagrama  
**Fig. 1.4.** Bree diagram of the portal frame

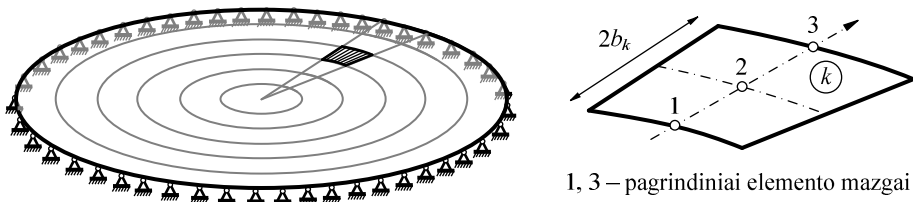
Verta atkreipti dėmesį į faktą, kad visi 1.4 paveikslo efektai pademonstruoti vienu ir tuo pačiu rėmo modeliu. Tai reiškia, kad deformavimo proceso eigą ir patį prisitaikomumo reiškinį lemia du veiksniai – poveikių rūšys ir poveikių kitimo diapazonų parametrai.

Plastiškumo teorijoje žinomos dvi pagrindinės prisitaikomumo teoremos – pirmoji, Melano (Melan 1936) ir antroji Koiterio (Koiter 1956). Melano prisitaikomumo teorema, kaip ir deformuojamo kūno ribinės pusiausvyros teorema, nustato apatines kintamosios kartotinės apkrovos kitimo ribas. Neprisitaikomumo sąlygas apibrėžia kinematinė Koiterio teorema (apie šias teoremas išsamiau bus kalbama vėliau, 1.2 poskyryje bus parodytas šių teoremų sąsajos energinių mechanikos principų požiūriu). Taigi konstrukcijų prisitaikomumo analizė ir optimizacija reikalauja ekstreminių energinių principų ir konstrukcijų diskretizacijos metodikų integralaus taikymo. Skaičiuojant plieninių konstrukcijų elgseną ciklinės plastiškosios suirties ir prisitaikomumo atvejais taikomas matematinis programavimas – plačiai paplitęs ekstreminių uždavinių sprendimo metodas. Taikant šiuos metodus atsirado galimybė plėtoti ir optimalių tampriųjų plastinių konstrukcijų projektavimą prisitaikomumo sąlygomis (apkrovų ir konstrukcijos parametrų požiūriu). Būtina pabrėžti, kad, net ir efektyviai taikant kompiuterines technologijas, išlieka sunkumų pereinant nuo prisitaikomumo teorijos uždavinių,

suformuluotų kūno įtempiais  $\sigma$  ir deformacijomis  $\varepsilon$ , prie diskretinių tų konstrukcijų modelių:

1. Skirtingai nuo trimačio kūno  $V$  taško  $x$ , kuriame plastiškumo sąlyga tenkinama arba netenkinama, diskrečios konstrukcijos skaičiuojamame pjūvyje gali būti mišrios būsenos sritys.
2. Egzistuoja nenuliniai sau pusiausvirieji įtempiai  $\sigma_r$ , kuriuos diskrečioje erdvėje atitinka nulinės liekamosios įrašos  $S_r = 0$ .

Disertacijoje nagrinėjamos santvaros, rėmai, apvalios ir žiedinės lenkiamos plokštės. Jų diskretizacijai pasitelkiami pusiausvirieji baigtiniai elementai (1.5 paveiksle parodytas plokštės elementas), kurie grindžiami būtent įrašų  $S$  aproksimacija (Belytschko 1972; Gallagher 1975; Kalanta 1995).



1.5 pav. Apvali simetrinė plokštė ir žiedinis baigtinis elementas su trimis mazgais

Fig. 1.5. Symetric circular plate and a circular finite lement with three nodes

Diskretizuotos konstrukcijos prisitaikomumo samprata disertaciniame darbe grindžiama Melano teorema, kuri siejama su statišškai leidžiamomis liekamosiomis įrašomis  $S_r$ . Statiškai leidžiamos įrašos  $S_r$  (šio vektoriaus komponentų yra  $n$ ) yra tokios, kurios tenkina konstrukcijos diskretinio modelio pusiausvyros lygtis  $AS_r = 0$  ir sumoje su kintamosiomis tampriosiomis įrašomis  $S_e(t)$  visuose skaičiuojamuosiuose pjūviuose tenkina takumo sąlygas  $f(S_e(t) + S_r) \leq C$ . Pusiausvyros lygčių koeficientų matrica  $A$  yra  $(m \times n)$  eilės; vektorius  $C$  aprašo plastiškumo konstantų reikšmes skaičiuojamuosiuose pjūviuose. Vėliau plastiškumo konstantos  $C$  bus siejamos su baigtinių elementų ribinėmis įrašomis  $S_0$  (plokštės elementams tai bus lenkimo momentai  $M_0$ ). Dar kartą priminsime, kad disertacijoje kintamiesiems naudojamas apatinis indeksas  $e$  žymi konstrukcijos tampraus būvio įrašas  $S_e$ , poslinkius  $u_e$  ir deformacijas  $\theta_e$ , indeksas  $r$  – liekamasias įrašas  $S_r$ , poslinkius  $u_r$  ir deformacijas  $\theta_r$ .

*Melano teorema tenkinama (konstrukcija prisitaikys), jeigu egzistuoja statiskai leidžiamos įrašos  $S_r$ , esant maksimaliai atsargos koeficiento  $\mu$  reikšmei.*

Laikas takumo sąlygose  $f(S_e(t) + S_r) \leq C$  eliminuojamas, įvedant tamprus skaičiavimo influentines įrašas  $S_{ej}$ ,  $j \in J$ :  $f(\mu \cdot S_{ej} + S_r) \leq C$ . Kaip minėta, Melano ir Koiterio teoremos išsamiai aptariamos 1.2 poskyryje.

Grijtant prie apvalios plokštės diskretinio modelio (1.5 pav.), kai žinomos apkrovos kitimo ribos  $F_{inf}$ ,  $F_{sup}$  netiesinės takumo sąlygos,  $f(S_{ej} + S_r) \leq C$  (dažniausiai naudojamas Hubero ir Mizeso plastiškumo kriterijus) turi būti tikrinamos visuose trijuose kiekvieno baigtinio elemento taškuose (bendra  $k$ -ojo elemento vidurio taško koordinatė yra  $\rho_k$ , o kiekvieno mazgo koordinatės  $\rho_{k,1}$ ,  $\rho_{k,2}$ ,  $\rho_{k,3}$ ). Kiekvieno elemento storis  $t_k$  yra pastovus visiems  $k \in K$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ); medžiagos takumo įtempis  $f_y$  yra pastovus ir vienodas visiems elementams, taigi ir ribinė atskiro elemento įraša yra vienoda visame elemente. Kol kas nesileidžiant į detalius svarstymus, galima pažymėti, kad tikslas – nustatyti šių ribinių jėgų (ribinių lenkimo momentų  $M_0 = [M_{01} \ M_{02} \ \dots \ M_{0s}]^T$ ) pasiskirstymą prisitaikomumo būvyje. Optimalumo kriterijus pasirenkamas  $\min L^T M_0$ , čia  $L$  yra elementų paviršiaus plotų vektorius. Gaunamas netiesinis, neiškilus matematinio programavimo uždavinys, kurio mechaninė interpretacija grindžiama supaprastinta plokščių skaičiavimo teorija.

Disertacijoje sukurta optimizavimo metodika, leidžianti nustatyti prisitaikiosios konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvį, nenagrinėjant detalių apkrovimo istorijų. Tam pasitelkiami dualūs ekstreminiai energiniai mechanikos principai: papildomos deformavimo energijos minimumo principas (statinė prisitaikomumo teorijos formuluotė) ir pilnosios potencinės energijos minimumas (kinematinė prisitaikomumo analizės formuluotė). Remiantis šiais ekstreminiais energiniais principais sudaroma duali matematinio programavimo uždavinių pora, leidžianti nustatyti tikrąjį prisitaikiosios konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvį (Atkočiūnas, 1999). Disertacijoje pateikiama pilna prisitaikiosios konstrukcijos tampriosios ir plastiškosios stadijos įtempių ir deformacijų būvio lygčių sistema (tai Oilerio ir Lagranžo lygtys). Šios lygtys gaunamos statinės formuluotės uždavinį susiejant su Kuno ir Takerio sąlygomis (Atkočiūnas 2011; Atkočiūnas *et al.* 2015; Bazaraa *et al.* 2006; Blaževičius *et al.* 2014). Būtent ši lygčių sistema leidžia nuodugnai analizuoti prisitaikomumo fenomeną ir kurti bendruosius prisitaikančių konstrukcijų tolydaus optimizavimo uždavinių matematinius modelius (šie klausimai plačiau aptariami 2 skyriuje).

## 1.2. Pagrindinės prisitaikomumo teorijos teoremos

### 1.2.1. Dualus Melano ir Koiterio teoremų ryšys

Tamprusis plastiškasis kūnas  $V$  su paviršiumi  $S$ , veikiamas KKA, nagrinėti pradedamas nuo jo ciklinės plastiškosios suirties (prisitaikomumo sąvoka kol kas nenagrinėjama). Tokio nagrinėjimo privalumas – išvengiama apkrovimo istorijos įtakos (toks nagrinėjimas plastiškumo teorijoje būdingas vienkartinės apkrovos atveju). Pasitelkus matematinio programavimo teoriją, įmanoma ir kintamosios kartotinės apkrovos atveju parodyti dualistinę Melano (Melan 1936) ir Koiterio (Koiter 1956) teoremų sąsają (Čyras, Atkočiūnas 1970).

Statiškai leidžiamų liekamųjų įtempių laukas  $\sigma_r$  tenkina pusiausvyros lygtis ir statikos kraštines sąlygas

$$\nabla \sigma_r = \mathbf{0} \text{ tūryje } V, \quad (1.1)$$

$$N\sigma_r = \mathbf{0} \text{ apkrovos paviršiuje } S_f, \quad (1.2)$$

$$N\sigma_r - \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ įtvirtinimo paviršiuje } S_u, \quad (1.3)$$

bei nepažeidžia stiprumo (plastiškumo) sąlygų

$$f(\sigma_r + \sigma_e(t)) \leq C \text{ tūryje } V, \quad (1.4)$$

čia  $\nabla$  – Hamiltono operatorius,  $N$  – algebrinis operatorius,  $\mathbf{r}$  – reakcijų intensyvumas įtvirtinimo paviršiuje  $S_u$ . Tamprieji įtempiai  $\sigma_e(t)$  yra kintamosios kartotinės apkrovos funkcijos:

$$\sigma_e(t) = \int_{S_f} \alpha \mathbf{F}(t) dS, \quad (1.5)$$

čia  $\alpha$  – įtempių influentinė matrica-funkcija. Naudojantis 1.1 poskyryje aptartais vektoriais  $\mathbf{F}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ;  $p = 2^m$ ,  $j \in J$  ( $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}_j \leq \mathbf{F}_{sup}$ ), suformuojami nuo laiko nepriklausantys pseudotampriųjų įtempių vektoriai  $\sigma_{e,j}$ .

Remiantis publikacija (Čyras, Atkočiūnas 1970) pasitelkiama tampriojo plastinio kūno statinė teorema apie ribinę kintamąją kartotinę apkrovą: *iš visų statiškai leidžiamų liekamųjų įtempių  $\sigma_r$  ciklinės plastiškosios suirties metu tikrasis yra tas, kuriam išorinių jėgų galingumas  $\dot{W}$  cikle yra maksimalus.*

Šią teoremą atitinka toks ekstreminis uždavinys:

$$\max_{S_f} \int \left( \dot{\mathbf{u}}_{r,\sup}^T \mathbf{F}_{\sup} + \dot{\mathbf{u}}_{r,\inf}^T \mathbf{F}_{\inf} \right) dS, \quad (1.6)$$

kai

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_{e,j}) \leq \mathbf{C}, \quad j \in J \quad \text{tūryje } V, \quad (1.7)$$

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{0} \quad \text{tūryje } V, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{0} \quad \text{paviršiuje } S_f, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_r - \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{paviršiuje } S_u. \quad (1.10)$$

Tikslo funkcija (1.6) reiškia išorinės apkrovos ciklo galingumo maksimumą,  $\dot{\mathbf{u}}_{r,\sup}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{r,\inf}$  yra liekamųjų poslinkių greičiai. Nežinomaisiais čia yra apkrovos kitimo ribos  $\mathbf{F}_{\sup}$ ,  $\mathbf{F}_{\inf}$  ir sau pusiausvirieji įtempiai  $\boldsymbol{\sigma}_r$ . Liekamųjų poslinkių greičiai  $\dot{\mathbf{u}}_{r,\sup}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{r,\inf}$  neįeina į uždavinio (1.6)–(1.10) sąlygas (1.7)–(1.10), todėl tikslo funkcija (1.6) gali būti maksimizuojama bet kuriems poslinkių greičių vektoriams, pavyzdžiui,  $\dot{\mathbf{u}}_{r,\sup} = \mathbf{T}_{\sup}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{r,\inf} = \mathbf{T}_{\inf}$  (šie tuomet tampa optimalumo kriterijaus svorio koeficientais, pavyzdžiui ieškant maksimalaus konstrukciją veikiančio krūvio).

Dualus uždaviniui (1.6)–(1.10) uždavinys yra:

$$\min \left\{ \sum_j \int_V \dot{\lambda}_j \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_{e,j})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_r} (\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_{e,j}) + \sum_j \int_V \dot{\lambda}_j \left[ \mathbf{C} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_{e,j}) \right] dV \right\} \quad (1.11)$$

kai

$$- \sum_j \dot{\lambda}_j \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_{e,j})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_r} + \nabla^T \dot{\mathbf{u}}_r = \mathbf{0}, \quad (1.12)$$

$$\sum_j \int_V \dot{\lambda}_j \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_{e,j})}{\partial \mathbf{F}_{\sup}} dV \geq \mathbf{T}_{\sup}, \quad (1.13)$$

$$\sum_j \int_V \dot{\lambda}_j \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_r + \boldsymbol{\sigma}_{e,j})}{\partial \mathbf{F}_{\inf}} dV \geq \mathbf{T}_{\inf}, \quad (1.14)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \mathbf{0} \quad \text{paviršiuje } S_u. \quad (1.15)$$



Nežinomaisiais uždavinyje (1.11)–(1.15) yra plastinių daugiklių greičiai  $\dot{\lambda}_j$  ir liekamųjų poslinkių greičiai  $\dot{\mathbf{u}}_r$ . Pats (1.11)–(1.15) uždavinys išreiškia kinematine teorema apie ribinę kintamąją kartotinę apkrovą: *iš visų kinematiškai leidžiamų liekamųjų poslinkių greičių  $\dot{\mathbf{u}}_r$  ciklinės plastiškosios suirties metu tikrasis yra tas, kurio energijos disipacijos greitis  $\dot{D}$  cikle yra minimalus.*

Užrašoma pirmoji matematinio programavimo dualumo teorema optimaliems uždavinių (1.6)–(1.10) ir (1.11)–(1.15) sprendiniams  $\mathbf{F}_{\text{sup}}^*$ ,  $\mathbf{F}_{\text{inf}}^*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_r^*$ ,  $\lambda_j^*$  ir  $\dot{\mathbf{u}}_r^*$ :

$$\int_{S_f} \left( \mathbf{T}_{\text{sup}}^T \mathbf{F}_{\text{sup}}^* + \mathbf{T}_{\text{inf}}^T \mathbf{F}_{\text{inf}}^* \right) dS = \sum_j \int_V \dot{\lambda}_j^* \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}_r^* + \boldsymbol{\sigma}_{e,j})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_r} (\boldsymbol{\sigma}_r^* + \boldsymbol{\sigma}_{e,j}) dV \quad (1.16)$$

(1.16) lygybė reiškia, kad išorinės apkrovos galingumas  $\dot{W}$  (1.6) tikrajame apkrovimo cikle yra lygus energijos disipacijos greičiui  $\dot{D}$  (1.11) šiame cikle. Bet kuriame apkrovos cikle išraiška (1.16) atitinka žinomą Koiterio (Koiter, 1956) teorema:

$$\mu \int_0^T \int_{S_f} \dot{\mathbf{u}}(t) \mathbf{F}(t) dS dt \leq \int_0^T \int_V \boldsymbol{\sigma}^T(t) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t) dV dt, \quad (1.17)$$

čia  $\mu$  – statiskai leidžiamas apkrovos daugiklis (kitame poskyryje jis bus vadinamas *prisitaikomumo atsargos koeficientu*). Ši išvada prisitaikomumui gauta nagrinėjant būtent kūno ciklinės plastiškosios suirties būvį. Metodika originali tuo, kad iš anksto nekelia jokių reikalavimų suirimo tipui (progresyvinis ar kintamasis plastiškumas). Suirimo tipas yra ekstreminio uždavinio (1.11)–(1.15) sprendimo rezultatas. Tokias mokslines idėjas pirmasis iškėlė A. Čyras.

### 1.2.2. Istorinis Melano ir Koiterio teoremų kontekstas

Prisitaikomumo reiškinį nagrinėti galima atskirai iš mechanikos statikos ir kinematikos pozicijų. Pastaroji yra labiausiai paplitusi tarp Vakarų Europos šalių mokslininkų. Pradžioje detalizuosime statinę prisitaikomumo teorema, išsaugodami pirminius jos pažymėjimus tenzorine forma.

**Statinė formuluotė** pirmiausia buvo sukurta Bleicho (Bleich 1932), o vėliau įrodyta Melano (Melan 1936). Supaprastinę įrodymą vėliau paskelbė Symondsas (Symonds 1951), vėliau Koiteris (Koiter 1960). Vis dėlto ši teorema įprastai vadinama Melano prisitaikomumo teorema (König 1987).

Tarkime, kad tamprusis plastiškasis kūnas  $V$  jau prisitaikė prie atsitiktine tvarka veikiančių apkrovų  $F(t)$ , galinčių kisti tik apkrovos daugikliais apibrėžtoje srityje  $\Omega$  (tai aptartoji apkrovų kitimo sritis, parodyta 1.1 pav.). Tuomet nebe-kinta nei atsiradęs plastinių deformacijų laukas  $\varepsilon_{ij}^p = \bar{\varepsilon}_{ij}$ , nei liekamųjų įtempių laukas  $\rho_{ij} = \bar{\rho}_{ij}$ , nepriklausomai nuo tolesnio tampriųjų įtempių  $\sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t)$  kiti-mo. Suprantama, pastarieji įtempiai gali varijuoti kintant apkrovai pagal (1.5) formulę. Iš Melano teoremos išeina, kad prisitaikomumui būtina sąlyga yra ne-kintamo liekamųjų įtempių lauko  $\bar{\rho}_{ij}$  egzistavimas, užtikrinančio, kad sąlyga

$$f\left[\sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}_{ij}(\mathbf{x})\right] \leq k(\mathbf{x}), \quad (1.18)$$

galiotų visoms srityje apibrėžtoms apkrovoms visuose kūno taškuose. Sąlyga (1.18) gali būti perrašyta taip:

$$\max_{x \in V} \max_{\beta_s \in \Omega} \frac{f\left[\sum_{s=1}^r \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t) + \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x})\right]}{k(\mathbf{x})} \leq 1. \quad (1.19)$$

Toliau pateikiama Melano teoremos klasikinė formuluotė: *jeigu egzistuoja nuo laiko nepriklausomas liekamųjų įtempių laukas  $\bar{\rho}_{ij}$  ir toks realusis skaičius  $\mu > 1$ , kad*

$$\bar{\rho}_{ij,j} = 0 \text{ tūryje } V, \quad \bar{\rho}_{ij} n_j = 0 \text{ ant paviršiaus } S_f,$$

$$\dot{\bar{\rho}}_{ij} = 0, \text{ kai } t \geq 0, \quad \int_V D_{ijkl} \bar{\rho}_{ij} \bar{\rho}_{kl} dV < \infty,$$

$$\max_{x \in V} \max_{\beta_s \in \Omega} \frac{f\left[\sigma_{ij}^e + \bar{\rho}_{ij}\right]}{k(\mathbf{x})} \leq \frac{1}{\mu}, \quad (1.20)$$

*tuomet konstrukcija prisitaikys, veikiant bet kokiai apkrovų sekai  $\beta_s(t)$  iš api-brėžtos srities  $\Omega$ .*

Melano teorema supaprastina prisitaikančių konstrukcijų analizę iki dviejų etapų:

- 1) tampros analizės veikiant visiems galimiems apkrovų deriniams;
- 2) tokio liekamųjų įtempių lauko radimo, kuris minimizuotų kairiąją (1.19) išraiškos pusę.

Pabrėžtina, kad statinėje prisitaikomumo teoremoje nėra nagrinėjami tampriųjų įtempių laukai su singuliariaisiais taškais.

### Kinematinė formuluotė

Kadangi neprisitaikymas yra susijęs su tam tikru plastinių deformacijų pasiskirstymu, galima tikėtis, kad prisitaikomumo analizės metodika galėtų būti pagrįsta ir derama kinematinųjų laukų analize. Pirmieji rezultatai, taikant tokį būdą, buvo pristatyti Nylo (Neal 1950), kuris pristatė ribinio ciklo idėją ir išvedė kinematinę prisitaikomumo teoriją plokštiesiems rėmams ir sijoms. Apibendrintą teoriją kontinualioms konstrukcijoms pateikė Koiteris (Koiter 1956). Iš šios teorijos buvo išvesti keli inkrementinio suirimo analizės metodai (Gokhfeld 1966; Sawczuk 1974).

Koiterio teorema teigia: *prisitaikomumo nebus, jeigu, veikiant tam tikrai apkrovimo sekai iš apkrovos daugikliais apibrėžtos srities  $\Omega$ , egzistuoja:*

- 1) apkrovos seka  $\beta_s(t) \in \Omega$ ,  $t \in (0, T)$ ;
- 2) plastinių deformacijų greičių ciklas  $\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}(\mathbf{x}, t)$ , sukeliantis atitinkamus plastinių deformacijų prieaugius per laiko intervalą

$$\Delta \bar{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}) = \int_0^T \dot{\bar{\epsilon}}_{ij}(\mathbf{x}, t) dt = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}),$$

$$\bar{u}_i = 0 \text{ ant paviršiaus } S_u \quad (1.21)$$

yra toks, kad

$$\int_0^T \left[ \int_V \sum_{s=1}^r \beta_s(t) F_i^s \dot{\bar{u}}_i dV + \int_{S_T} \sum_{s=1}^r \beta_s(t) T_i^s \dot{\bar{u}}_i dS \right] dt > \int_0^T \int_V \dot{D}(\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}) dV dt. \quad (1.22)$$

Pritaikius virtualaus darbo principą, kairioji nelygybės (1.22) pusė gali būti perrašyta taip:

$$\int_0^T \int_V \sigma_{ij}^e \left[ \dot{\bar{\epsilon}}_{ij} + D_{ijkl} \dot{\bar{\rho}}_{kl} \right] dV dt,$$

čia  $\dot{\bar{\rho}}_{kl}$  – liekamųjų įtempių laukas, vienareikšmiškai apibrėžtas deformacijų  $\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}$ . Tačiau paskutinis integralas pranyksta, nes  $D_{ijkl} \sigma_{ij}^e$  yra tamprus (taigi kinematiškai leidžiamas) deformacijų laukas.

Tuomet nelygybė (1.22) įgauna tokią formą:

$$\int_0^T \int_V \sigma_{ij}^e \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} dV dt > \int_0^T \int_V \dot{D}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}) dV dt. \quad (1.23)$$

Glaustai apie kinematinės prisitaikomumo teoremos įrodymą. Tarkime, kad reikalinga kūno prisitaikomumui sąlyga (1.18) galioja. Tuomet, bet kokiam plastinių deformacijų greičių laukui  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^P$ , dėl takumo sąlygos iškilumo, galioja nelygybė

$$\left[ \sigma_{ij} - \left( \sigma_{ij}^e + \bar{\sigma}_{ij} \right) \right] \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^P \geq 0,$$

čia  $\sigma_{ij}$  – takumo įtempis, susietas su  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^P$  taip, kad sandauga  $\bar{\sigma}_{ij} \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^P$  yra lygi disipacijai  $\dot{D}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^P)$ . Integruojant nelygybę visame kūno tūryje ir laiko intervale  $(0, T)$ , gaunama

$$\int_0^T \int_V \dot{D}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^P) dV dt \geq \int_0^T \int_V \sigma_{ij}^e \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^P dV dt + \int_0^T \int_V \bar{\rho}_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^P dV.$$

Tačiau, jeigu plastinės deformacijos prieaugis  $\Delta \varepsilon_{ij}^P = \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{x}, T) - \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{x}, 0)$  yra kinematiškai leidžiamas, o taip yra kai  $\varepsilon_{ij}^P = \bar{\varepsilon}_{ij}$ , paskutinis integralas pranyksta ir likusioji nelygybė prieštarauja prielaidai (1.22). Taigi prisitaikymas yra neįmanomas jeigu galioja abi sąlygos (1.21) ir (1.22).

Kita vertus, kūnas (konstrukcija) prisitaikys, jeigu egzistuoja realūs skaičius  $\mu > 1$ , toks, kad visiems apkrovimo variantams  $\beta_s(t)$  ir visiems kinematiškai leidžiamiems deformacijų greičių laukams  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$  (t. y. tiems kurie sukelia atitinkamus deformacijų prieaugius) galioja tokia nelygybė:

$$\mu \cdot \int_0^T \int_V \sigma_{ij}^e(\mathbf{x}, t) \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}(\mathbf{x}, t) dV dt \leq \int_0^T \int_V \dot{D}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}) dV dt. \quad (1.24)$$

Analogiška išvada (1.17) buvo gauta, pasitelkus ekstreminius energinius principus (1.2.1 skirsnis).

## 1.3. Šiuolaikinės prisitaikomumo teorijos taikymo kryptys

### 1.3.1. Bendrieji pastebėjimai

Istoriškai prisitaikomumo teorijos tyrimai buvo nukreipti, viena vertus, į tolesnę pačios teorijos plėtotę, kita, į taikomųjų metodikų kūrimą. Pastarajai kryptčiai (santvarų, sijų, rėmų, plokščių, kevalų skaičiavimui) priklauso gerai šioje srityje žinomų mokslininkų darbai (Corradi, Donato 1975; Corradi, Zavelani 1974; Maier 1969; Moskviti, 1960; Neal 1950; Ponter 1972; Rozenblum 1958; Rzhantsyn 1954; Sawczuk 1974; Symonds, Prager 1950). Kompleksinę – teorinę ir praktinę – prisitaikomumo teoriją savo darbuose plėtojo jau minėti Koiteris, Melanas ir kiti (Koiter 1960; König 1987; Melan 1936; Nguyen Dang Hung, König 1976).

Tiesiogiai taikant klasikines Melano ir Koiterio prisitaikomumo teoremas ir elementarius mechanikos metodus, galima nagrinėti tik labai paprastas sistemas. Galimybės pritaikyti šiuos metodus bet kokio sudėtingumo konstrukcijoms gerokai išplėtė šiuolaikinių skaitinių metodų ir matematinio programavimo panaudojimas (Aliawdin 2005; Bousshine *et al.* 2003; Dang Van *et al.* 1995; Maier, Cohn 1978; Maier 1969; Staat, Heitzer 2003; Stein *et al.* 1993; Weichert, Maier 2001; Weichert, Ponter 2009). Pažymėtini eksperimentiniai prisitaikomumo tyrimai, kuriuos atliko Gokhfeldas, Černiavskis ir kiti (Dorosz *et al.* 1981; Gokhfeld, Cherniavsky 1980). Plėtojant prisitaikomumo teorijos taikymą atsiškyrė keletas specifinių sričių, kurios glaustai aptariamos kitame poskyryje.

### 1.3.2. Geometriniai efektai, medžiagų ir konstrukcijų įvairovė

**Geometriškai netiesinių konstrukcijų prisitaikomumas.** Vienas pirmųjų svarbių darbų apie geometrinius efektus parašytas Majerio (Maier 1972). Jame nagrinėjamas netiesinių efektų atliekamas darbas ir suformuluojama jo neneigiamumo sąlyga, užtikrinanti konstrukcijos stabilumą. Vėliau, devintojo dešimtmečio pradžioje atsirado pirmieji svarstymai apie geometrinių efektų įtraukimą į prisitaikomumo uždavinių formuluotes. Kionigas ir Maieris apžvelgė ne tik geometrinių bet ir dinaminių, bei medžiagos sustiprėjimo efektų įvertinimą prisitaikomumo uždaviniuose, naudodami diskretizacijai patogias matricines formuluotes (Duszek 1988; König, Maier 1981). Geometrinį netiesiškumą išsamiai nagrinėjo Vokietijos mokslininkai, kuriems artimesnės įtempių lauko ir kontinuumo formuluotės (Gross-Weege 1990; Tritsch, Weichert 1995; Weichert, Hachemi 1998; Weichert 1986). Profesorius Veichertas šiuose tyrimuose bene geriausiai žinomas, tačiau svarbių darbų parašė ir Dang Vanas, Majeris, Saksė

(Dang Van *et al.* 1995; Weichert, Maier 2001). Verta paminėti Tritsch apgintą disertaciją (vadovaujant Veichertui) apie geometriškai netiesinių konstrukcijų prisitaikomumą (Jean-Bernard Tritsch 1993).

Svarbūs šiai sričiai yra Lenkijos mokslininkų Kionigas ir ypač Siemaško darbai (König, Siemaszko 1988). Šie autoriai nagrinėjo prisitaikomumo stabilizaciją, naudodami geometrinio netiesiškumo formuluotę. Minėtame 1988 m. publikuotame straipsnyje autoriai sprendžia prisitaikomumo uždavinį ir randa plastines deformacijas (prisitaikomumo kelią), tuomet grįžta ir eina ta kryptimi mažais žingsniais, naudodami geometrinį netiesiškumą ir įvairias medžiagos sustiprėjimo formas. Pateikiami palyginimai tarp idealiai tampriosios plastinės elgsenos ir įvairių sustiprėjimo modelių. Pirminiame šių autorių straipsnyje (Siemaszko, König 1985) išsamiau paaiškinamas būtent geometrinio netiesiškumo taikymas.

Vėliau Siemaško praplėtė klasikinę prisitaikomumo teoriją ir pritaikė geometriškai netiesiniams, sustiprėjimo ir silpnėjimo efektams. Jo sukurta metodika iteraciškai nustatoma tikroji konstrukcijos elgsena prasidėjus takumui ir gaunamas prisitaikomumo daugiklis (Siemaszko 1995). Autorius tai vadina neprisitaikomumo analize, nes, įvertinus netiesinę elgseną po plastinių deformacijų atsiradimo, pradinio prisitaikomumo daugiklio gali ir neužtekti, jei atsiranda nestabilumas. Tačiau straipsnyje autoriai vertina sustiprėjimą ir pavyzdžiu rodo, kad klasikinis prisitaikomumo daugiklis yra žemiau tikrojo, kai medžiaga sustiprėja.

Majeris su kolegomis apžvelgė netiesinio prisitaikomumo pažangą ir nagrinėjo ciklinio apkrovimo istorijas analizuodami cilindrą veikiamą ciklinių temperatūrinių apkrovų (Maier *et al.* 1993). Jo straipsnyje pateikiami skaitiniai rezultatai su modeliavimo programa *Abaqus*, vertinamas cilindro išklupimas ir skirtingi pritaikomumo keliai po daugelio kartotinių ciklų. Taikoma von Mizeso takumo sąlyga, kuri palyginama ir su Tresca kriterijumi. Būtina paminėti keletą straipsnių rinkinių, kuriuose apibendrinami mokslo pasiekimai šioje srityje (Dang Van *et al.* 1995; Kleiber, König 1990). Galima teigti, kad šios srities tyrimai pastaraisiais dešimtmečiais šiek tiek primiršti.

**Prisitaikomumo teorija geotechnikos uždaviniuose.** Prisitaikomumo taikymas geotechnikoje yra gana nuodugniai ištirtas. Prisitaikomumo teorija iš esmės yra tinkama nagrinėti ciklines, kintamas kartotines gamtos ir judančio transporto apkrovas, kurios dažniausiai ir veikia kelių dangas ir pagrindus (Chazallon *et al.* 2009; Collins, Boulbibane 2000; Raad, Weichert 1995; Sharp, Booker 1984). Šioje srityje prisitaikomumo koncepcija taikoma ilgalaikėi sluoksniuotųjų medžiagų elgsenai nustatyti. Pagrindinė idėja – modeliuoti konstrukciją iš nehomogeniškos tampriosios plastiškosios medžiagos, kuri galiausiai prisitaiko prie apkrovos arba jos neatlaiko, t. y. jos elgsena išlieka plastinė (Boulbibane *et al.* 2005).

Ribinė prisitaikomumo apkrova nustatoma pagal mažiausią prisitaikomumo daugiklį tarp visų dangos sluoksnių. Projektuojant kelių dangas prisitaikomumo teorija pasitelkiama dangos medžiagai ir jos storiui parinkti taip, kad, veikiamą skaičiuojamosios apkrovos, danga prisitaikytų. Medžiagos takumo riba dažniausiai nustatoma pagal Moro ir Kulono (*Mohr-Coulombs*) kriterijų (Boulbibane *et al.* 2005). Prisitaikomumo riba priklauso nuo trinties koeficiento, medžiagų stiprumo santykio, standumo santykio, trinties kampo ir sluoksnio storio (Wang, Yu 2013). Kelio dangų diskretizacijai literatūroje aprašytuose modeliuose naudojami dviejų ir trijų dimensijų baigtiniai elementai (Chazallon, Habiballah 2005), o optimizavimo uždaviniais spręsti dažniausiai pasitelkiami specializuoti vidinio taško (angl. *interior-point*) algoritmai (Nguyen *et al.* 2008).

**Konstrukcijų prisitaikomumas įvertinant medžiagos sustiprėjimą ir susilpnėjimą.** Medžiagos sustiprėjimo fenomenas pradėtas tyrinėti pačioje prisitaikomumo teorijos taikymo pradžioje Nylo ir Majerio (Maier 1972; Neal 1950). Vėliau prie metodikos tobulinimo svariai prisidėjo Kionigas, Siemaško ir Šteinai (König, Maier 1976; König, Siemaszko 1988; Stein *et al.* 1992). Ši tematika yra aktuali ir populiari tarp tyrėjų iki šiol, kurie prisitaikomumo uždaviniuose sėkmingai taiko sustiprėjimo fenomeną (Abdel-Karim 2005; Aliawdin, Urbanska 2013; Bodovillé, Saxcé 2001; Bouby *et al.* 2009; Simon 2013; Van Long, Dang Hung 2008) ir kiek rečiau – susilpnėjimo (Cocchetti, Maier 2003).

**Rėminių konstrukcijų ir santvarų prisitaikomumas.** Strypinių statybinių konstrukcijų prisitaikomumui skiriama daug dėmesio, tai viena aktualiausių prisitaikomumo teorijos taikymo sričių. Paprasčiausios konstrukcijos buvo nagrinėtos pačių pirmųjų prisitaikomumo teorijos kūrėjų, o šiuolaikiniai tyrimai į prisitaikomumo uždavinius įtraukia vis daugiau praktinio projektavimo ir sudėtingos konstrukcijų elgsenos apribojimų. Minimalaus tūrio konstrukcijų projektavimą su takumo ir stabilumo ribojimais nagrinėja Džiambanko, Logo ir nemažai kitų mokslininkų (Benfratello *et al.* 2013a; Kaliszky, Lógó 2002; Palizzolo *et al.* 2014; Tin-Loi 2000). Šalyse, kuriose svarbus žemės drebėjimų poveikis konstrukcijoms, į prisitaikomumo uždavinius įtraukiamos ir seisminės apkrovos (Askari *et al.* 2013; Benfratello *et al.* 2013b). Prisitaikomumo teorija gali būti sėkmingai taikoma ir cikliškai veikiančioms jūrų apkrovoms įvertinti ir jūrose stovinčioms konstrukcijoms projektuoti (Fadaee *et al.* 2008, 2007). Konstrukcijos elgsenos KKA atveju tiksliai įvertinimui ir lyginamajai analizei išlieka svarbūs iteraciniai prisitaikomumo skaičiavimai (Guralnick *et al.* 1986; Kanno, Takewaki 2007; Milošević *et al.* 2011; Palizzolo 2004). Kol kas nedaug išplėta, bet labai svarbi sritis – konstrukcijų optimizacija prisitaikomumo sąlygomis, taip pat nagrinėta kelių autorių (De Saxcé, Hung 1992; Domaszewski, Samp-Stanisławska 1985; Spiliopoulos 1999).

Daugelis minėtų tyrimų iliustruojami plokščiosioms strypinėms konstrukcijoms, todėl verta paminėti, kokių problemų kyla siekiant projektuoti prisitaikančias trimates struktūras. Problema kyla iš pačios trimačio konstrukcijos modelio. Ne visuomet įmanoma tokią konstrukciją sėkmingai suskaidyti į plokščius komponentus. Šiuolaikinės statinių konstrukcijos neretai turi sudėtingą trimatę geometriją ir yra veikiamos įvairių krypčių apkrovų, todėl neišvengiamai turi būti projektuojamos integraliai. Iki šiol nėra daug praktinių prisitaikomumo pavyzdžių, kuriuose būtų nagrinėjama trijų dimensijų konstrukcija su trimatėmis apkrovomis. Jeigu tokie modeliai nagrinėjami, tai tik labai supaprastinus kitas prisitaikomumo sąlygas (Bisbos, Ampatzis 2008; Long, Hung 2010; Malena, Casciaro 2008; Papadrakakis, Papadopoulos 1995; Skordeli, Bisbos 2010; Van Long, Dang Hung 2008). Problemas iš dalies lemia ir sudėtingas trimačio rėminio baigtinio elemento takumo aprašymas – realių statybinių skerspjuvių pjūvio takumo sąlyga priklauso nuo daugelio veiksnių. Tai apsunkina plastinių lankstų vietos nustatymą ir tampa sudėtinga nustatyti visos konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvį. Takumo sąlygų gausa komplikuoja bendros konstrukcijų skaičiavimo metodikos prisitaikomumo sąlygomis kūrimą.

### 1.3.3. Prisitaikiosios konstrukcijos poslinkių nustatymas

Konstrukcijos prisitaikomumą, kaip minėta, lemia sau pusiausvirieji liekamieji įtempiai  $\sigma_r$ , tačiau jie atsiranda kartu su liekamosiomis deformacijomis  $\theta_r$  ir liekamaisiais poslinkiais  $u_r$  (mazgų posūkiais, pasislinkimais). Konkrečios konstrukcijos prisitaikomumo būvis nusakomas vieninteliais (pagal Melano teoremą) liekamaisiais įtempiais, tačiau liekamieji kinematiniai dydžiai (deformacijos ir poslinkiai) gali būti ne vieninteliai: jie priklauso nuo konkrečios apkrovimo istorijos  $F(t)$  kurios metu konstrukcija prisitaikė. Toks deformacijų nevienareikšmiškumas yra nulemtas nusikrovimo reiškinio: jeigu konstrukcijos taške, veikiant vienai apkrovos kombinacijai  $F_j$  takumo sąlyga yra tenkinama kaip lygybė, ten susidaro plastinės deformacijos, tačiau vėliau apkrovimo procese to paties taško takumo sąlyga gali tapti griežta nelygybe: tuomet įvyksta vadinamasis taško (arba skerspjuvio) nusikrovimas. Nepaisant nusikrovimo, nagrinėjame taške išlieka plastinė deformacija, kuri lemia tolesnį liekamųjų įtempių ir poslinkių formavimąsi. Taigi, tai reiškia, kad apkrovimą apibrėžiant tik viršutinėmis ir apatinėmis ribomis, neįmanoma tiksliai (vienareikšmiškai) nustatyti liekamųjų poslinkių. Liekamieji poslinkiai prisitaikomumo proceso metu kinta nemonotoniškai, todėl dažnai bandoma nustatyti tik jų kitimo ribas  $u_{r,inf} \leq u_r(t) \leq u_{r,sup}$  (Atkočiūnas, Venskus 2011; Capurso 1974; Lange-Hansen 1998).



Siekiant tiksliai nustatyti liekamųjų deformacijų ir poslinkių vertes prisitaikiusioje konstrukcijoje, būtina nagrinėti konkrečią apkrovimo istoriją. Kitu atveju, tektų nagrinėti visas įmanomas apkrovimo istorijas, tačiau net ir atmetus nereikšmingas kombinacijas (nesukeliančias plastinių deformacijų), realioms statybinėms konstrukcijoms tai padaryti nėra realu. Konkreti apkrovimo istorija gali būti žinoma atskirais atvejais – nagrinėjant ypatingas apkrovas, pavyzdžiui, vienkartinį sunkiasvorio transporto judėjimą tiltu, sprogimo, žemės drebėjimo vienkartinį poveikį ar pan. Tokiems atvejams, taip pat ir teoriniam sprendinių patikrinimui, mokslininkai yra pasiūlę keletą metodų (Maier *et al.* 1995; Ponter 1972). Dalis tokių metodų veiksmingi tik vienkartei, monotoniškai kintančiai apkrovai (Baronas, Čyras 1971). Vadinamieji tiesioginiai metodai, išvedami tiesiogiai iš ribinių būvių ar prisitaikomumo teoremų ir formuluojami kaip matematinio programavimo uždaviniai. Nguyen 1983 pasiūlė paprastą tiesinio programavimo uždavinį (Nguyen 1983):

$$\min \sum_{i=1}^{n_r} k_i, \quad (1.25)$$

kai

$$\bar{\mathbf{G}}' \boldsymbol{\theta}'_p + \mathbf{k} = \mathbf{M}'_r, \quad (1.26)$$

$$\boldsymbol{\theta}'_p = \mathbf{S} \boldsymbol{\theta}_p \geq \mathbf{0}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{M}'_r = \mathbf{S}' \mathbf{M}_r \geq \mathbf{0}, \quad (1.28)$$

čia  $k_i$  – nežinomi koeficientai (skaičiai), kurie, uždaviniui artėjant prie optimalios reikšmės, nyksta ir (1.26) formulė virsta įprastine liekamųjų dydžių pusiausvyra. Matrica  $\bar{\mathbf{G}}' = \mathbf{S}' \mathbf{G} \mathbf{S}$  yra liekamųjų įrašų infliuentinė matrica (ji dauginama iš plastinių deformacijų, norint apskaičiuoti liekamąsias įrašas):

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \left( \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1}.$$

Matricos  $\mathbf{S}$  ir  $\mathbf{S}'$  yra diagonaliosios

ženklų matricos (įstrižainėje turi vienetą, minus vienetą arba nulį). Matrica  $\mathbf{S}$  surenka plastinių deformacijų ženklus suirties metu (gautus iš prieš tai išspręsto suirties uždavinio). Matrica  $\mathbf{S}'$  tą pačią operaciją atlieka su liekamųjų įrašų vektoriumi. Tokio uždavinio sprendinys yra plastinės deformacijos prieš pat suirimą (vos sumažinus žinomą suirimo apkrovą). Tą patį sprendinį galima pasiekti ir papildomos deformavimo energijos minimumo principu paremtu kvadratinio programavimo uždaviniu (apie tokius uždavinius bus kalbama 2.2 poskyryje) (Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2003).

### 1.3.4. Matematinis programavimas optimizuojant prisitaikančias konstrukcijas

Konstrukcijų optimizacija (nekalbant apie prisitaikomumą) yra gana jauna mokslo sritis. Pirmieji svarbūs tyrimai atlikti tik XX a. antrojoje pusėje (Cox 1965; Gerard 1956; Mróz 1960). Matematinį programavimą tampriosioms platinėms konstrukcijoms optimizuoti aktyviai pradėta taikyti tik aštuntajame XX a. dešimtmetyje (Čyras 1969; Leśniak 1970). Vėliau ši teorija suformuluota iki šiuolaikinio lygio ir pritaikyta prisitaikomumo uždaviniams spręsti (Armand 1971; Cohn, Maier 1979; Maier, Cohn 1978; Maier, Munro 1982).

Šiame skirsnyje glaustai apžvelgiami labiausiai paplitę matematinio programavimo metodai, taikomi prisitaikiusių konstrukcijų liekamųjų įrašų skaičiavimo uždaviniams spręsti. Matematinio programavimo terminais, toks uždavinys užrašomas taip:

$$\min \mathcal{F}'(\mathbf{x}), \quad (1.29)$$

$$\text{kai} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.30)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (1.31)$$

1.6 paveiksle parodyta leidžiamoji sprendinių sritis  $\mathbf{x}$  (1.30)–(1.31) ir per ją einančios tikslo funkcijos  $\mathcal{F}'(\mathbf{x})$  lygio linijos (brūkšninė linija). Kuno ir Takerio sąlygos (kartais vadinamos trijų mokslininkų garbei Karush, Kuhn ir Tucker sąlygomis) yra būtinos sąlygos, kad uždavinio (1.29)–(1.31) sprendinys būtų optimalus. Sprendinys yra optimalus jeigu galima rasti tokius dydžius  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ir  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , kad būtų tenkinamos sąlygos:

$$\nabla \mathcal{F}'(\mathbf{x}^*) + \nabla \mathbf{g}^T(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\lambda} + \nabla \mathbf{h}^T(\mathbf{x}^*) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1.32)$$

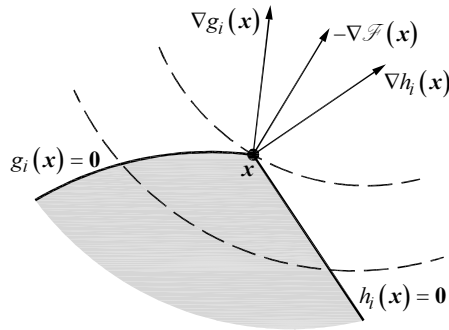
$$\lambda_i^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad (1.33)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (1.34)$$

(1.32) lygtys reiškia, kad optimalaus (1.29)–(1.31) uždavinio sprendinio  $\mathbf{x}^*$  tikslo funkcijos gradientas  $\nabla \mathcal{F}'(\mathbf{x}^*)$  yra uždavinio apribojimų gradientų tiesinė kombinacija (Kuno ir Takerio sąlygos optimaliame taške  $\mathbf{x}^*$  vaizduojamos 1.6 paveiksle):

$$\nabla \mathcal{F}'(\mathbf{x}^*) = - \sum_{i=1}^m \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \lambda_i - \sum_{i=1}^l \nabla h_i(\mathbf{x}^*) u_i. \quad (1.35)$$

Vektorių  $\lambda$  ir  $u$  komponentai vadinami Lagranžo daugikliais, o sąlygos  $\lambda_i g_i(x^*) = 0$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – matematinio programavimo griežtumo sąlygomis.



1.6 pav. Geometrinė Kuno ir Takerio sąlygų interpretacija (Atkočiūnas 2011)

Fig. 1.6. Geometric interpretation of the Kuhn-Tucker conditions

Matematinis programavimas taikomas visuose vadinamuosiuose tiesioginiuose prisitaikomumo ir ribinių būvių analizės metoduose (angl. *direct methods*). Tokie metodai tiesiogiai grindžiami statine ir kinematinine prisitaikomumo teoremais. Šie metodai yra gerai išstbulinti ir vis dar užima didžiausią nišą konstrukcijų optimizavimo srityje ir analizėje prisitaikomumo sąlygomis (Alyavdin 2005; de Saxcé *et al.* 2013; Dieter, Alan 2009; Mróz *et al.* 1995; Pochtman, Piatigorskii 1978; Sawczuk, Mróz 1975; Spiliopoulos, Weichert 2014; Weichert, Maier 2002, 2000). Toliau šiame poskyryje nagrinėjamos kelios užsienio mokslininkų prisitaikomumo uždavinių formuluotės, pagrįstos tiesioginiais matematinio programavimo metodais, svarbiais disertacijos tematikai. Rašant kitų autorių uždavinius, laikomasi originalių žymėjimų, kurie nėra įtraukti į šios disertacijos žymėjimų sąrašą.

Kališky ir Logo nagrinėjo prisitaikančių strypinių konstrukcijų (santvarų) optimizaciją taikydami matematinį programavimą (Kaliszky, Lógó 1997). Minimalaus tūrio strypinių konstrukcijų, apkrautų daugiaparametre apkrova optimizavimo uždavinio modelis su papildomų liekamųjų jėgų energijos  $W_{r0}$  suvaržymu, formuluojamas taip:

$$\min V = A^T I,$$

kai

$$Q_e^{\max} + Q_r \leq R,$$

$$-Q_e^{\min} - Q_r \leq R,$$

$$A_0 - A \leq 0,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \int_0^{l_i} \left[ q_{ri}(s) \right]^2 ds - W_{r0} \leq 0.$$

Čia funkcija  $q_r(s)$  išreiškia vidinių jėgų variaciją išilgai strypo,  $Q$  yra vidinių jėgų vektorius,  $A$  ir  $I$  strypų skerspjūvių plotų ir ilgių vektoriai,  $R$  – strypų atsparių (plastinių momentų arba takumo jėgų) vektorius. Straipsnio autoriai pažymi, kad naudojant papildomus suvaržymus strypų gniuždymo įtempiams, į optimalaus projektavimo procedūrą gali būti įtraukti stabilumo reikalavimai. Šioje disertacijoje bus taikomas būtent toks principas.

Italijos mokslininkai (Palizzolo *et al.* 2014) taip pat plėtoja tiesioginius matematiniu programavimu pagrįstus prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodus. Uždavinius jie papildyto stabilumo ir standumo apribojimais, taip pat teikia siūlymus įtraukti seisminius poveikius. Tokia sąlygų gausa optimizavimo uždavinius padaro labai netiesiškus ir jų sprendimui būtina naudoti apytikslus metodus arba, kaip siūlo autoriai, išskaidyti uždavinį į du sprendimo žingsnius. Pirmiausia, deramai pasirinktam skaičiui vadinamojo perturbacijos koeficiento  $\omega > 0$  reikšmių sprendžiama tokia uždavinio formuluotė:

$$\min_{\left( t, u_0, u_{ij}^s, u_{ij}^l, u_j^s, u_j^l, \hat{Y}_0^s, Y_{0+}^l, Y_{0-}^l \right)} V, \quad (1.36)$$

kai

$$t_{k_d} \in T_{k_d}, \quad k_d = 1, 2, \dots, n_d, \quad (1.37)$$

$$t_{k_c}^{\min} \leq t_{k_c} \leq t_{k_c}^{\max}, \quad k_c = n_d + 1, n_d + 2, \dots, n_b \times m, \quad (1.38)$$

$$Ht - \bar{h} \geq 0, \quad (1.39)$$

$$Q_0 = DCu_0 + Q_0^*, \quad Ku_0 - F_0^* = 0, \quad (1.40)$$

$$u_{ij}^S = \Phi_j \frac{\tilde{\Phi}_j M_{it} \tau_{it} S_d^S(T_j)}{\omega_j^2}, \quad Q_j^S = DCu_j^S, \quad Q_l^S = \sqrt{\sum_j \sum_k \rho_{kl} Q_{kl}^S Q_{jl}^S}, \quad (1.41)$$

$$u_{ij}^I = \Phi_j \frac{\tilde{\Phi}_j \mathbf{M}_{tt} \boldsymbol{\tau}_{tt} S_d^I(T_j)}{\omega_j^2}, \quad \mathbf{Q}_j^S = \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{u}_j^S, \quad Q_l^I = \sqrt{\sum_j \sum_k \rho_{kl} Q_{kl}^I Q_{jl}^I}, \quad (1.42)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^E \equiv \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{G}}_p (\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_0^{P\Delta}) - \mathbf{R} \leq 0, \quad (1.43)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_+^S \equiv \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{G}}_p (\mathbf{Q}_{0e} + \mathbf{Q}^S + \mathbf{Q}_{P\Delta+}^{S0e}) - \mathbf{S} \tilde{\mathbf{Y}}_0^S + \bar{\omega} \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \leq 0, \quad (1.44)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_-^S \equiv \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{G}}_p (\mathbf{Q}_{0e} - \mathbf{Q}^S + \mathbf{Q}_{P\Delta-}^{S0e}) - \mathbf{S} \tilde{\mathbf{Y}}_0^S + \bar{\omega} \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \leq 0, \quad (1.45)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0^S \geq 0, \quad (1.46)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_+^I \equiv \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{G}}_p (\mathbf{Q}_{0e} + \mathbf{Q}^I + \mathbf{Q}_{P\Delta+}^{I0e}) - \mathbf{S} \mathbf{Y}_{0+}^I - \mathbf{R} \leq 0, \quad \mathbf{Y}_{0+}^I \geq 0, \quad (1.47)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_-^I \equiv \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{G}}_p (\mathbf{Q}_{0e} - \mathbf{Q}^I + \mathbf{Q}_{P\Delta-}^{I0e}) - \mathbf{S} \mathbf{Y}_{0-}^I - \mathbf{R} \leq 0, \quad \mathbf{Y}_{0-}^I \geq 0. \quad (1.48)$$

Šiame modelyje lygtys (1.37)–(1.39) yra technologiniai (konstrukciniai) kintamųjų apribojimai, lygtys (1.40)–(1.42) apibrėžia tampriosios konstrukcijos elgsenos dydžius, veikiant fiksuotoms ir seisminėms apkrovoms, o (1.43)–(1.48) lygtys nusako prisitaikomumo ir ribinio būvio apribojimus (iš esmės takumo sąlygas), parašytus remiantis apatinės ribos (statine) prisitaikomumo teorema.

Antruojų žingsniu tyrėjai (Palizzolo *et al.* 2014) minimalų konstrukcijos tūrį nustato iš atskiro minimizacijos uždavinio, kurio kintamasis yra tik perturbacijos koeficientas:

$$\min_{(\omega)} V, \quad (1.49)$$

kai

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Y}}_0^S(\omega) \mathbf{S} \tilde{\mathbf{Y}}_0^S(\omega) + \omega \left( \left| U_{te}^S \right|_{\max} - \bar{U}_t \right) \leq 0, \quad (1.50)$$

čia (1.50) lygtys yra pasirinkti konstrukcijos plastiškumo ribojimai (savo esme deformatyvumo ar poslinkių ribojimai), išreikšti perturbacijos koeficientu.

Tai, kad prisitaikančios konstrukcijos optimizavimas su poslinkių ribojimais yra, iš principo, du uždaviniai sutalpinti vienas į kitą, rašė Atkočiūnas (Atkočiūnas 1999). Remiantis tokia interpretacija, liekamųjų įrašų nustatymas optimizavimo uždavinyje yra vidinis energijos minimizacijos uždavinys (vadinamasis analizės uždavinys), o poslinkių ribojimas atliekamas tik po to – antruojų žingsniu.

Uždavinio matematinė formuluotė užrašoma taip:

$$\min \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0, \quad (1.51)$$

$$\text{kai} \quad \min \left( \mathcal{F}'(\mathbf{S}_r) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r \right), \quad (1.52)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (1.53)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{C} - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J, \quad (1.54)$$

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{S}_0), \quad \mathbf{S}_0 \geq \mathbf{0}, \quad (1.55)$$

$$\mathbf{u}_{r, \min} \leq \mathbf{u}_{r, \inf}, \quad \mathbf{u}_{r, \sup} \leq \mathbf{u}_{r, \max}, \quad (1.56)$$

$$\mathbf{u}_{ri, \inf} = \min_v \mathbf{H}_i^* \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{u}_{ri, \sup} = \max_v \mathbf{H}_i^* \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.57)$$

$$\mathbf{B}_\lambda^* \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{B}_r \mathbf{S}_r^*, \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \tilde{\mathbf{C}} \leq D_{\max}. \quad (1.58)$$

Uždavinio nežinomieji yra ribinių įrašų vektorius  $\mathbf{S}_0$ , liekamųjų įrašų vektorius  $\mathbf{S}_r$  ir bazinių sprendinių vektorius  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ . Sąlygos  $\mathbf{B}_\lambda^* \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{B}_r \mathbf{S}_r^*$  yra liekamųjų deformacijų darnos lygtys, apie kurias plačiau bus rašoma 2.4.2 skirsnyje. Šiame uždavinyje vektoriaus  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$  komponentai nėra susieti su matematinio programavimo griežtumo sąlygų tenkinimu ir neįgyja plastinių daugiklių reikšmės, kuri bus aptariama vėlesnėse optimizavimo uždavinių formuluotėse. Tokia uždavinio formuluotė užtikrina, kad būtų tenkinamas papildomos deformavimo energijos minimumo principas (1.52). Uždavinys sprendžiamas iteracijomis, pirmiausia randamos liekamosios įrašos iš vadinamojo vidinio analizės uždavinio (1.52)–(1.54), tuomet tikrinama ar konstrukcijos liekamieji poslinkiai neviršija nustatytų ribų  $\mathbf{u}_{r, \min}$ ,  $\mathbf{u}_{r, \max}$  ( pridėjus tampriąją dalį, uždavinį galima formuluoti ir suminiais poslinkiais) ir ieškoma geresnė tikslo funkcijos reikšmė (Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2006; Skaržauskas *et al.* 2005).

Poskyrio pabaigoje verta paminėti, kad tiesioginiai prisitaikomumo metodai, pagrįsti matematinio programavimu, labai priklauso nuo matematinių optimizavimo uždavinių sprendimo algoritmų, todėl, sukūrus netiesinį (o kartais ir neišskilųjį) konstrukcijos optimizavimo uždavinio matematinį modelį, tampa sudėtinga jį skaitiškai realizuoti (Benfratello *et al.* 2013a). Nuo taikomų algoritmų labai priklauso kaip efektyviai ir greitai gali būti išspręsti tokie uždaviniai. Tiesioginius metodus nelengva taikyti dideliems, baigtinių elementų diskretizacija

pagrįstiems realių konstrukcijų modelių esant optimizavimo prisitaikomumo būviui uždaviniams spręsti. Iš principo tokius metodus gana sudėtinga apibendrinti ir taikyti skaitinėse baigtinių elementų programose (Casciaro, Garcea 2002). Šiems tikslams yra kuriami netiesioginiai prisitaikomumo metodai (angl. *indirect methods*), apie kuriuos bus rašoma kitame skyriuje.

## 1.4. Iteracinė konstrukcijų analizė

### 1.4.1. Bendros pastabos apie inkrementinę analizę

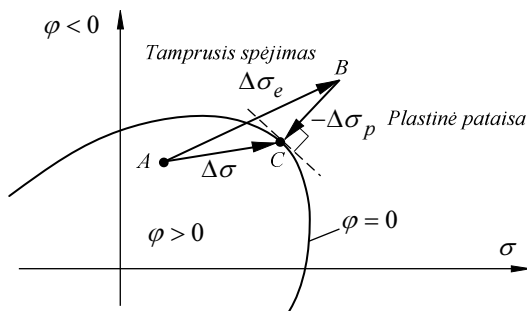
Tiesioginių, optimizacija pagrįstų metodų alternatyva yra iteraciniai prisitaikomumo būvio nustatymo metodai (Casciaro, Garcea 2002; Groß-Weege 1997; Janas *et al.* 1995; Zhang 1995), kurie siekia didinti skaitinės realizacijos efektyvumą ir glaudinti prisitaikomumo ir baigtinių elementų metodo integraciją.

Vienas iš iteracinės prisitaikomumo analizės metodų yra vadinamieji tamprius kompensavimo (angl. *elastic compensation*) algoritmai, kuriuos išsamiai nagrinėjo Ponteris (Ponter, Carter 1997; Ponter, Engelhardt 2000). Aprašytu metodu prisitaikomumo daugiklis gaunamas iteratyviai skaičiuojant pseudotampriuosius sprendinius, kurie sukuria monotoniškai mažėjančią viršutinių ribų seką, konverguojančią į tikslų sprendinį. Toks metodas turi privalumų, palyginti su tiesioginiais prisitaikomumo metodais, ir yra tinkamas taikyti su baigtiniais elementais, tačiau jis vis tiek yra sudėtingas ir skaitiškai neefektyvus, palyginti su atitinkama ribinių būvių iteracine analize. Algoritmui reikia daug iteracijų ir kiekvienoje iš jų būtina visiškai iš naujo atlikti tamprią konstrukcijos analizę, performuojant globaliąją standumo matricą.

Alternatyvų iteracinį metodą pasiūlė Pycko (Janas *et al.* 1995; Pycko 1997, 1995). Autorius performulavo klasikinę Melano teoremą, siekdamas sukurti efektyvų inkrementinės analizės algoritmą. Efektyvumas čia vėl suprantamas kaip skaitinės realizacijos sparta. Apkrovimo ciklą autorius pakeitė baigtiniu apkrovimo variantų skaičiumi. Iš prisitaikomumo analizės žinoma, kad prisitaikomumo apkrovos daugiklis ir asimptotinis tamprus konstrukcijos elgesys nepriklauso nuo apkrovų variantų pridėjimo sekos (nuo apkrovimo istorijos). Ši savybė leidžia transformuoti pereinamąją tampriosios plastinės analizės dalį į tam tikrą ciklinės inkrementinės analizės tipą. Visi ciklą sudarantys apkrovimo variantai inkrementinėje analizėje analizuojami tuo pačiu laiko momentu. Pagrindinė informacija apie plastinių deformacijų plėtimosi procesus per visą apkrovimo ciklą įtraukiama į pertvarkytą tangentinę matricą. Tokiu būdu pereinamoji deformacijų fazė analizuojama ciklas po ciklo, be inkrementinių apkrovos didinimų ciklo viduje. Pycko pademonstravo savo algoritmo galimybes trimatiams KKA veikiamiems rėmams analizuoti. Vis dėlto, kaip ir Ponterio algoritmas, šis

yra paremtas gana didelių tangentinių ir integralinių matricių formavimų ir tai neleidžia pasiekti norimos skaičiavimų spartos.

Iteracinei plastinių konstrukcijų analizei dažnai taikomi grįžimo atvaizdavimo (angl. *return mapping*) algoritmai (1.7 pav.). Pirmuosius tyrimus apie šiuos algoritmus atliko Kriegas (Krieg, Krieg, 1977), vėliau esminius postūmius padarė Simo (Ortiz, Simo 1986; Simo, Ortiz 1985; Simo, Taylor 1985; Simo 1992), taip pat kiti autoriai (Armero, Perez-Foguet 2002; Bilotta *et al.* 2012; Casciaro, Garcea 2002; Clausen *et al.* 2006; Garcea *et al.* 2005; Hoppe, Petrova 2005). Algoritmai sukurti grįžti ant takumo paviršiaus, kai konstrukcijos taško įtempiai jį viršija, taigi algoritmas skirtas plastiškumui nagrinėti. Jis laibiausiai tinka, kai analizuojama tolydžioji takumo funkcija, tada grįžimo kelias yra lengvai apibrėžiamas, takumo sąlyga yra tiesinė dalimis (angl. *piecewise linear*), grįžimas tampa galimas ne į tiesę ar plokštumą, bet į tašką. Šias problemas nagrinėja minėtas Klauzenas straipsnyje (Clausen *et al.* 2006).



1.7 pav. Grįžimo atvaizdavimo (angl. *return mapping*) algoritmo grafinė iliustracija

Fig. 1.7. Illustration of the return mapping algorithm

Grįžimo atvaizdavimo algoritmas patogus von Mizeso takumo sąlygai, tuomet jis vadinamas radialinio atvaizdavimo (angl. *radial return*) algoritmu. Žinoma, atskiru atveju, kai konstrukcijoje veikia tik viena įraža, taikyti algoritmą labai paprasta bet kokiai takumo sąlygai. Šie algoritmai tinkami ir nagrinėjant sustiprėjančias konstrukcijas – tuomet grįžtama į pasislinkusį (jei kinematinis sustiprėjimas) arba padidėjusį (jei izotropinis sustiprėjimas) takumo paviršių.

Mokslo literatūroje galima rasti ne vieną minėto algoritmo variaciją, pritaikytą konkrečioms problemoms nagrinėti. Bilota (Bilotta *et al.* 2012) patobulino vadinamąją artimiausio taško projekcijos schemą (angl. *closest point projection scheme*) įvesdamas į algoritmą kvadratinio programavimo uždavinį. Savo straipsnyje mokslininkas taiko arkos metodą prieaugio žingsniui reguliuoti ir teigia, kad jo metodas yra skaitiškai efektyvesnis sudėtingesniems uždaviniams spręsti (iteracijos pakeičiamos optimizavimo uždavinio su nelygių apribojimais



sprendimu). Jis pateikia dviejų dimensijų konstrukcijos (plokštelės), apkrautos vienkarte apkrova ir sumodeliuotos baigtiniais elementais, analizės pavyzdį.

Klauzenas, Damkilde ir Andersenis straipsnyje (Clausen *et al.* 2006) galima rasti išsamų įvadą, kuriame apibendrinami grįžimo atvaizdavimo algoritmai ir pateikiama daug literatūros nuorodų. Autoriai siūlo pritaikyti patobulintą algoritmą, skirtą takumo sąlygoms svarbiausių įtempių erdvėje. Kai šios sąlygos yra tiesinės, siūlomas efektyvus algoritmas, ypač tinkamas diegti į kompiuterių programas. Vienintelis autorių nurodomas trūkumas – poreikis transformuoti koordinatinių erdvę iš esamos į svarbiausiąją. Straipsnyje paaiškinama, kaip grįžti (angl. *plastic corrector*) į plokštumą, tiesę arba tašką (1.7 pav.), pateikiamos formulės ir algoritmas. Nagrinėjamas pavyzdys su Moro ir Kulono takumo sąlyga, tačiau tik su vienkarte apkrova.

### 1.4.2. Energinis principas grįžimo atvaizdavimo metodikoje

Casciaro ir Garcea sukūrė inkrementinį-iteracinį prisitaikomumo analizės metodą, kuris, jų teigimu, galėtų būti taikomas apibendrintai bet kokiame baigtinių elementų metode (Casciaro, Garcea 2002). Siūlomas algoritmas turi panašumų su Rikso kelio sekimo algoritmu, naudojamu tampriųjų plastinių konstrukcijų analizei ir pusiausvyros kitimui. Autoriai šiame straipsnyje tiria prisitaikomumo daugiklio radimą netiesioginiu metodu, t. y. iteraciniu iteratyviniu metodu, pradedant nuo tampraus sprendinio. Tai turėtų būti efektyviau, negu klasikinis matematinis programavimas, ypač didesniems praktiniams uždaviniams. Iteracijose naudojamas įprastas grįžimo atvaizdavimo algoritmas, tačiau svarbu, kad šį algoritmą jie papildė Haro ir Karmano principu. Pateikiami plokščių rėmų skaičiavimo pavyzdžiai. Vėliau autoriai išplėtė šį metodą ir plokščioms dviejų dimensijų konstrukcijoms (plokštėms, sienutėms) (Garcea *et al.* 2005).

Autorių straipsnyje algoritmas taikomas prisitaikomumo daugikliui  $\mu_s$  nustatyti. Skaičiuoti pradedama nuo laisvai pasirinkto daugiklio  $\mu \leq \mu_s$  ir jį atitinkančio įtempio  $\sigma^*$ , kuris nebūtinai yra leidžiamojoje įtempių srityje  $E_s(\mu)$  (takumo paviršiaus viduje). Tuomet, atliekant grįžimo žingsnį, ieškomas tikrasis įtempis:

$$\sigma = \sigma_a[\sigma^*, \mu] = \sigma^* - K\varepsilon_p, \quad \sigma \in E_s(\mu).$$

Įtempis  $\sigma$  su plastine deformacija susietas plastinio tekėjimo dėsniu:

$$\varepsilon_p = \lambda \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \in \partial f_s[\sigma, \mu], \quad \lambda: \begin{cases} = 0, & \text{jeigu } f_s[\sigma^*, \mu] < 0, \\ \geq 0, & f_s[\sigma, \mu] = 0, \text{ jeigu } f_s[\sigma^*, \mu] \geq 0. \end{cases}$$

Tokia schema yra grįžimo algoritmas pagal projekciją į artimiausią tašką, ir ji gali būti atitinkamai pakeista Haro ir Karmano funkcijos minimizavimu, t. y. tokia sąlyga:

$$\phi(\sigma - \sigma^*) := \frac{1}{2} \left\{ (\sigma - \sigma^*)^T K^{-1} (\sigma - \sigma^*) \right\} = \min, \quad \forall \sigma \in E_s(\mu).$$

Straipsnio autoriai teigia, kad tokia formuluotė labiau tinka skaitiniam prietaikymui. Tai yra griežtai iškilios funkcijos minimumas, taigi  $\sigma_a$  yra viena-reikšmiškai apibrėžtas kintamaisiais  $\mu$  ir  $\varepsilon$ .

Būtent šiuo minimumo principu bus pagrįsti ir disertacijos autoriaus taikomi iteracinės-inkrementinės analizės metodai, parodyti 3.3 poskyryje.

### 1.4.3. Geometrinis principas grįžimo atvaizdavimo metodikoje

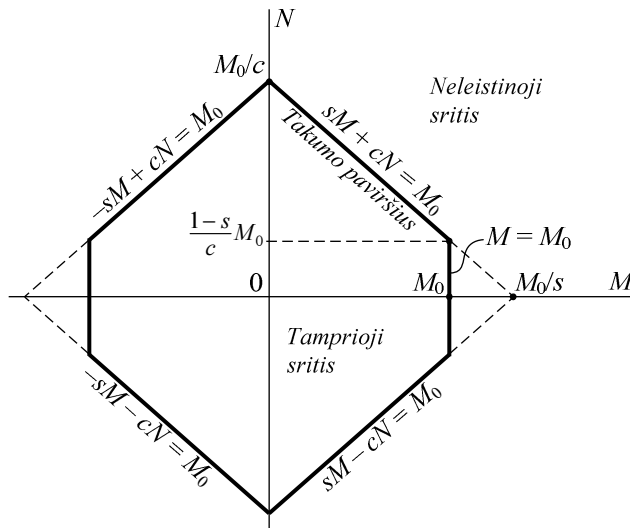
Grįžimo atvaizdavimo (angl. *return mapping*) algoritmas realizuojamas skirtingai, priklausomai nuo taikomų takumo sąlygų. Kaip minėta, klasikinis yra tolydaus von Mizeso takumo paviršiaus atvejis, kai bet kuriam erdvės taškui galima rasti projekciją, statmeną, takumo paviršiaus liestinei (1.7 pav.). Sudėtingesnis atvejis yra nagrinėjant ištisintą takumo sąlygą, sudarančias uždarus daugia-kampius. Dvitėjo profiliuotio takumo sąlyga, veikiant ašinei jėgai ir lenkimo momentui (1.8 pav.), aprašoma taip:

$$|sM| + |cN| \leq M_0,$$

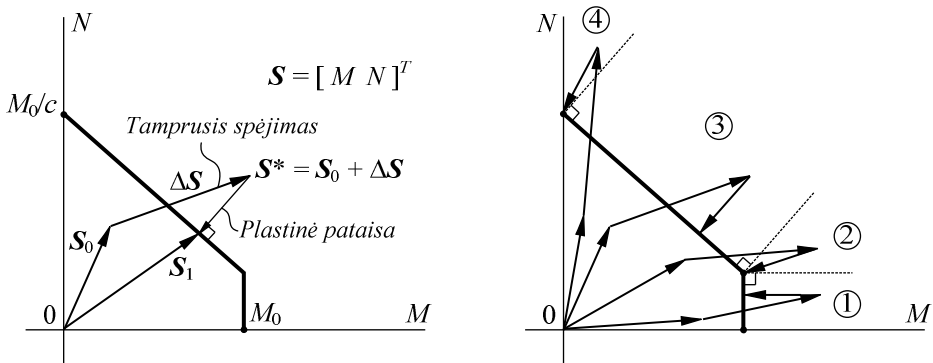
$$\text{čia } s = \frac{1}{1,18} \approx 0,85, \quad c = \frac{M_0}{N_0} = \frac{\sigma_y W_{pl}}{\sigma_y A} = \frac{W_{pl}}{A},$$

čia  $A$  – elemento skerspjūvio plotas;  $W_{pl}$  – elemento plastinis atsparumo momentas;  $\sigma_y$  – plieno takumo įtempis;  $M_0$  – plastinis skerspjūvio lenkimo momentas;  $N_0$  – ribinė elemento ašinė jėga.

Grįžimo atvaizdavimo algoritmas aprašo, kaip grįžtama ant takumo paviršiaus, jeigu pseudoelastinis įtempis skerspjūvyje pasiekia neleistiną tašką (išeina už takumo paviršiaus ribų). Vieną algoritmo žingsnį sudaro pirminis spėjimas, skaičiuojant pagal tamprųjų dėsnį nuo pasirinkto apkrovos prieaugio (angl. *elastic predictor*), ir plastinė pataisa (angl. *plastic corrector*), jeigu įtempis (įrašą) išeina už leidžiamųjų ribų. Priklausomai nuo taško, kuriame atsiduria pradinio spėjimo įrašos, plastinė pataisa turi grąžinti skerspjūvio įrašą ant takumo paviršiaus tiesės arba jų susikirtimo taško (1.9 pav.).



1.8 pav. Dvigubos simetrijos dvitėjo profilio takumo sąlyga  
Fig. 1.8. Yield condition of a double symmetric I-beam profile



1.9 pav. Grįžimo atvaizdavimo algoritmas. Grįžimas į tiesę ir į tašką  
Fig. 1.9. Return mapping algorithm. Returning to a line and a point

Algoritmą patogiu nagrinėti lenkiamam rėmui, kai vertinama tik lenkimo momento įtaka ir takumo kriterijus yra ribinis lenkimo momentas kiekviename skerspjūvyje. Toliau pateikiama tokio algoritmo realizacija ir išvedimas. Pirmiausia nagrinėjamos fizinės lenkiamosios konstrukcijos priklausomybės:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} ,$$

čia  $\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}$  – kvazidiagonalioji elementų standumų matrica.

Tuomet:

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}_e, \quad \mathbf{M} = \mathbf{K} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\theta}_p \right).$$

Atskiriama tamprioji ir plastinė dalys (ten, kur egzistuoja plastinės deformacijos, lenkimo momentai lygūs nuliui):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RC} \\ \mathbf{K}_{CR} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_R^T \\ \mathbf{A}_C^T \end{bmatrix} \mathbf{u} - \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\theta}_p \end{bmatrix} \right) \left. \begin{array}{l} \} \text{ tamprus} \\ \} \text{ plastinis} \end{array} \right\}$$

Išreiškiama tangentinė standumo matrica:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{A}_R \mathbf{K}_p \mathbf{A}_R^T, \quad \text{čia: } \mathbf{K}_p = \mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{RC} \mathbf{K}_{CC}^{-1} \mathbf{K}_{CR}.$$

Irašų pokytis (pradinė pusiausvyros matrica padauginta iš *atvaizduotų* lenkimo momentų):

$$\Delta \mathbf{F}_I = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{M};$$

Jėgos, kurios nėra pusiausvyrosios (liekamosios vidinės/išorinės jėgos):

$$\Delta \mathbf{F}_r = \Delta \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}_I,$$

čia  $\Delta \mathbf{F}$  – einamojoje iteracijoje pridėta suminė išorinė apkrova (globalioji iteracija). Tuomet liekamųjų poslinkių prieaugis:

$$\Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}_t^{-1} \Delta \mathbf{F}_r.$$

Suminiai poslinkiai iteracijos pabaigoje:

$$\mathbf{u}_{end} = \mathbf{u}_{initial} + \Delta \mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}_{initial}^{-1} \cdot (\mathbf{F}_{initial} + \Delta \mathbf{F}) + \Delta \mathbf{u}_r.$$

Liekamųjų lenkimo momentų prieaugis pjūviuose, kuriuose nėra plastinių deformacijų:

$$\mathbf{M}'_r = \mathbf{K}_p \mathbf{A}_R^T \Delta \mathbf{u}_r.$$

Suminiai lenkimo momentai iteracijos pabaigoje:

$$\mathbf{M}_{end} = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}'_r,$$

čia  $\mathbf{M}'_r$  turi mažiau elementų, todėl likusieji vektoriaus komponentai prilyginami nuliui). Tada suminiai liekamieji momentai iteracijos pabaigoje:

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{M}_{end} - \mathbf{M}_0 - EI \cdot \Delta \boldsymbol{\theta},$$

čia  $EI \cdot \Delta\theta = \Delta m = \alpha \cdot \Delta F$  (suminis momentas minus suminis pseudotamprusis). Galiausiai priskiriama  $M_0 \Rightarrow M_{end}$  ir vykdoma kita iteracija.

Tokiu būdu realizuojama viena globali iteracija, kuri galioja tiesinių takumo sąlygų atveju geometriškai tiesinei konstrukcijai. Vertinant antrosios eilės efektus (geometrinį netiesiškumą) iteracijos viduje dar turėtų būti atliekamos Niutono iteracijos koreguojant dėsnio netiesiškumą. 1.10 paveiksle pateikiama algoritmo lenkiamam rėmui realizavimo kompiuteriu principinė schema. Grįžtamasis atvaizdavimas kiekvienam konstrukcijos pjūviui  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $j \in J$ .

$$\left[ \begin{array}{l} \text{kiekvienam } j = 1 : k \\ \text{jeigu } |M_{0,j} + EI_j \cdot \Delta\theta_j| \leq M_{pl,j} \\ \text{tai } \begin{cases} \Delta\theta_{p,j} = 0, \\ M_j^* = M_{0,j} + EI_j \cdot \Delta\theta_j, \\ \Delta M_j = EI_j \Delta\theta_j. \end{cases} \\ \\ \text{jeigu } (M_{0,j} + EI_j \cdot \Delta\theta_j) > M_{pl,j} \\ \text{tai } \begin{cases} \Delta\theta_{p,j} = \Delta\theta_j - \Delta\theta_{j,e}, \\ M_j^* = M_{pl,j}, \\ \Delta M_j = M_{pl,j} - M_{0,j}. \end{cases} \\ \\ \text{jeigu } (M_{0,j} + EI_j \cdot \Delta\theta_j) < -M_{pl,j} \\ \text{tai } \begin{cases} \Delta\theta_{p,j} = \Delta\theta_j - \Delta\theta_{j,e}, \\ M_j^* = -M_{pl,j}, \\ \Delta M_j = M_{pl,j} - M_{0,j}. \end{cases} \\ \text{ciklo pabaiga.} \end{array} \right.$$

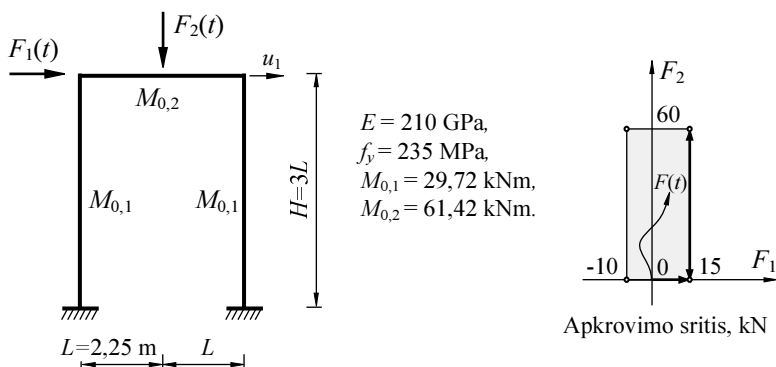
**1.10 pav.** Principinis grįžimo atvaizdavimo algoritmas

**Fig. 1.10.** Principle of the return mapping algorithm

### Grįžimo atvaizdavimo algoritmo taikymo pavyzdys

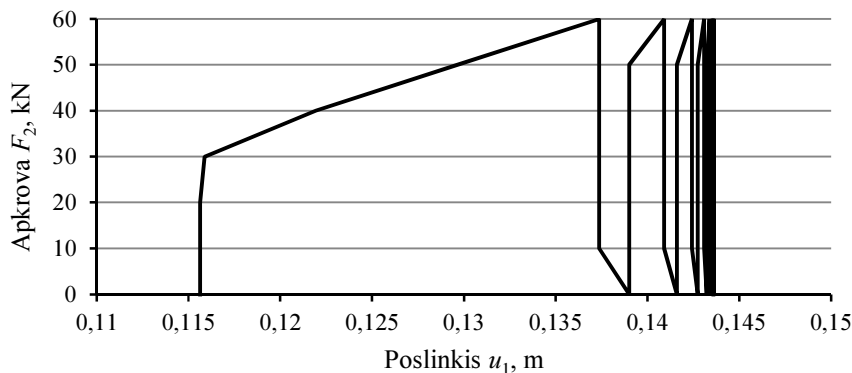
Nagrinėjamas portalinis rėmas, veikiamas dviejų koncentruotų jėgų, galinčių nepriklausomai kisti duotoje srityje (1.11 pav.). Geometriniai parametrai yra žinomi: skerspjūvių inercijos momentai  $I_1 = 8,83 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$  ir  $I_2 = 2,44 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ . Iteracinei rėmo analizei pasirenkama viena apkrovimo istorija: pridedama jėga

$F_1$  (15 kN), tuomet nenukrovus pamažu didinama jėga  $F_2$  iki viršutinės ribos (60 kN). Antru etapu  $F_2$  palengva nukraunama ir ciklas vėl kartojamas. Fiksuojamas horizontalaus sijos poslinkio pokytis apkrovimo metu. Gauta, kad po 10 apkrovimo ciklų deformacijos nustoja augti ir konstrukcija prisitaiko (1.12 pav.).



1.11 pav. Portalinis rėmas veikiamas KKA

Fig. 1.11. Portal frame subjected to variable repeated loads



1.12 pav. Apkrovos kitimo ir poslinkio priklausomybė

Fig. 1.12. Variation of displacement over the load

Detaliau nagrinėjant 1.12 paveikslą, matoma, kad per pirmuosius apkrovimo ciklus konstrukcija patiria didžiausias plastines deformacijas. Vėlesniuose cikluose plastinių deformacijų, o tuo pačiu ir poslinkio prieaugis mažėja. Iteracinis skaičiavimas sustabdomas, kai plastinių deformacijų prieaugis cikle tampa norimai mažas (pagal pasirinktą matematinį kriterijų).

## 1.5. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas

1. Literatūros analizė parodė, kad ligšioliniai prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai nėra pakankamai išplėtoti ir kol kas negali būti taikomi praktiniam plieninių konstrukcijų projektavimui. Todėl nauji tokių uždavinių matematiniai modeliai turi būti kuriami įtraukiant projektavimo standartų reikalavimus ir sprendžiami integraliai sujungiant visas būtinausias sąlygas.
2. Kuriant naujus skaičiavimo metodus išskiriamos dvi svarbios kryptys: idealiai tamprių plastinių konstrukcijų, veikiamų kintamosios kartotinės apkrovos, ribinio būvio analizė ir šių konstrukcijų prisitaikomumas. Pirmuoju atveju, ieškomos kintamosios kartotinės apkrovos kitimo ribos arba ieškomas nagrinėjamos konstrukcijos parametų pasiskirstymas iš ciklinės plastiškosios suirties sąlygos. Tokiu atveju uždaviniai iš esmės supaprastėja, nes nereikia nagrinėti apkrovimo istoriją, o prisitaikomumo sąvoka siejama tik su konstrukcijos būviu iki suirimo. Todėl diserstacijoje bus kuriami prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodai apjungiantys stiprumo, stabilumo ir standumo norminius reikalavimus.
3. Konstrukcijos prisitaikomumo būvį užtikrina ne ekstreminio uždavinio tikslo funkcijos reikšmė, bet statiškai leidžiamo įrąžų būvio (kai tenkinamos pusiausvyros lygtys ir plastiškumo sąlygos) egzistavimas. Pakankama, jei egzistuoja bent vienas statiškai leidžiamas įrąžų vektorius.
4. Literatūros analizė parodė, kad matricinė pagrindinių lygčių ir priklausomybių užrašymo forma naudotina ne tik sudarant uždavinių matematinius modelius, bet ir konstrukcijų nagrinėjimui taikant skaitinius mechanikos metodus. Todėl formuluojamas uždavinys, kad disertacijoje, sudarant konstrukcijos diskretinį modelį, turi būti taikomi pusiausvyrieji baigtiniai elementai.
5. Daroma išvada, kad prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodų plėtra turi būti siejama su energiniais mechanikos principais, matematiniu programavimu ir itin aiškiais optimalumo kriterijų parinkimo metodais. Todėl disertacijos uždavinys – vystyti teorinius ir praktinius prisitaikomumo teorijos taikymo metalinėms konstrukcijoms projektuoti metodus.





---

## Prisitaikomumo teorijos plėtotė diskretizuotoms konstrukcijoms

Antrajame skyriuje, naudojant matematinio programavimo priemones, kuriami prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai. Visų pirma aptariamas būtinas matricinis diskrečios tampriosios strypinės konstrukcijos aprašymas. Visos konstrukciją aprašančios lygtys sujungiamos į bendrą sistemą, aprašančią įtempių ir deformacijų būvį. Remiantis šia sistema išvedami konstrukcijos analizės ir vėliau optimizavimo uždaviniai. Užrašomas bendrasis prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinys, tinkamas bet kokiai konstrukcijai. Toliau skyriuje pateikiamos naudingos optimizavimo uždavinių transformacijos, leidžiančios sumažinti programavimo uždavinių apimtį; išvedama tiesinių takumo sąlygų uždavinio formuluotė, kuri šioje disertacijoje taikoma strypinėms konstrukcijoms. Aptarus visas teorines ir matematines prielaidas, nagrinėjamas eurokodo standartų reikalavimų įtraukimas į optimizavimo uždavinius. Suformuluojamos elementų stiprumo, klupumo ir poslinkių ribojimo sąlygos. Aptariamas klupumo sąlygų ryšys su plastine konstrukcijos elgsena ir matematine tokių reikalavimų realizacija. Nagrinėjant tinkamumo būvio reikalavimus, pateikiamos metodikos, kaip optimizavimo uždaviniuose sujungti skirtingus EC patikimumo lygmenis, taikant atitinkamus dalinius koeficientus. Tokiu būdu šiame skyriuje pateikiamos visos matematinės uždavinių formuluotės, reikalingos konkrečių konstrukcijų skaitinei optimizacijai trečiajame ir

ketvirtajame skyriuose. Skyriuje pateikta medžiaga publikuota disertacijos autoriaus straipsniuose (Blaževičius *et al.* 2014; Blaževičius, Atkočiūnas 2015; Atkočiūnas *et al.* 2015).

## 2.1. Bendrosios prisitaikančių diskretizuotų sistemų lygtys ir priklausomybės

### 2.1.1. Tampriosios diskretinės sistemos įrašos ir deformacijos

Norint gauti skaitinius konstrukcijos analizės rezultatus, neišvengiamai reikia taikyti konstrukcijos diskretizaciją, kuri paremta baigtiniu laisvės laipsnių skaičiumi nusakančiu elementų deformacijas. Diskretizacija lemia apytikslį pusiausvyros arba geometrinių (arba net abiejų) lygčių įvertinimą. Daugelis baigtinių elementų metodo modelių kuriami taip, kad tenkintų vienas ar kitas iš minėtų lygčių (Zienkiewicz 2001). Verta paminėti du gerai žinomus modelius: poslinkinių ir pusiausvirųjų baigtinių elementų. Populiariausias pasaulyje poslinkinių baigtinių elementų modelis grindžiamas parametriniais poslinkių laukais, užtikrinančiais deformacijų darną elementų jungtyse (Barauskas *et al.* 2004; Fish, Belytschko 2007; Rao 2011). Tokiu būdu visos konstrukcijos poslinkių laukas yra tolydusis. Pusiausvirųjų baigtinių elementų modelis pagrįstas parametriniais įtempių laukais, užtikrinančiais įtempių pusiausvirą elementų viduje ir jų jungtyse. Tokiu būdu visas konstrukcijos įtempių laukas yra pusiausvirasis. Šioje disertacijoje prisitaikomumo būvis nagrinėjamas remiantis statine Melano teorema, pagrįsta liekamųjų įtempių (diskretizuotai konstrukcijai įrašų) egzistavimu, todėl logiškai pasirenkama pusiausvirųjų baigtinių elementų formuluotė.

Nagrinėjama idealiai tampri plastinė konstrukcija, veikiamą kintamosios kartotinės apkrovos (KKA). Kvazistatinė apkrova  $F(t)$  yra charakterizuojama nuo laiko nepriklausomomis viršutinėmis ir apatinėmis kitimo ribomis  $F_{sup}$ ,  $F_{inf}$ . Šiame skyriuje sistemos elgsenos aprašymas grindžiamas konstrukcijos diskretiniu modeliu. Diskretizuoti taikomi pusiausvyrieji baigtiniai elementai (Belytschko 1972; Blaževičius *et al.* 2014; Gallagher 1975; Kalanta 1995).

Tegul yra žinoma konstrukcijos geometrija, medžiaga ir pasirinktų elementų forma. Tampus konstrukcijos įtempių būvis išreiškiamas įrašų vektoriumi  $S_e = [S_{e1} \ S_{e2} \ \dots \ S_{e\zeta}]^T$ ,  $\zeta = s \times \nu$ , čia  $s$  – baigtinių elementų skaičius  $k = 1, 2, \dots, s$ ,  $k \in K$ ;  $\nu$  – mazgų (skaičiuojamųjų pjūvių) skaičius kiekviename elemente ( $l = 1, 2, \dots, \nu$ ,  $l \in L$ ).

Taigi, iš viso yra  $\zeta$  skaičiuojamųjų pjūvių:  $i = 1, 2, \dots, \zeta$ ,  $i \in I$ . Mazginės deformacijos yra užrašomos vektoriumi  $\theta_e = [\theta_{e1} \ \theta_{e2} \ \dots \ \theta_{e\zeta}]^T$ .

Kiekvieno konstrukcijos taško (pjūvio) įtempių būvis gali būti išreiškiamas keliomis įrašomis (pvz. ašine jėga ir lenkimo momentu) priklausomai nuo konstrukcijos tipo. Todėl bendras vektorių  $S_e$  ir  $\theta_e$  komponentų skaičius yra  $n = s \times v \times n_v$ , čia  $n_v$  – mazge veikiančių įrašų skaičius. Jeigu konstrukcijos laisvumo laipsnis yra  $m$ , o įrašų vektorius  $S_e$  turi  $n$  komponentų, tada pusiausvyros lygčių koeficientų matrica yra  $A$  ( $m \times n$ ) ir pačios pusiausvyros lygtys yra:

$$A S_e = F \quad (2.1)$$

čia  $F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]^T$  – išorinių jėgų komponentų vektorius.

Geometrinės lygtys sieja diskretinės konstrukcijos poslinkius  $u_e = [u_{e1} \ u_{e2} \ \dots \ u_{em}]^T$  ir deformacijas:

$$A^T u_e = \theta_e. \quad (2.2)$$

Įvertinus kraštines sąlygas, visos diskretinės konstrukcijos geometrinės lygtys yra:

$$A^T u_e - D S_e = 0, \quad (2.3)$$

čia  $D$  ( $n \times n$ ) – kvazidiagonalioji pasidavumo matrica. Fizinė poslinkių vektoriaus  $u_e$  prasmė paaiškinama dualiu ryšiu tarp pusiausvyros (2.1) ir geometrinių (2.2) lygčių. Šis ryšys teigia, kad kiekviena pusiausvyros lygtis atitinka konkretų komponentą iš vektoriaus  $u_e$ , o kiekvienas įrašų vektoriaus  $S_e$  komponentas susietas su atitinkamu deformacijų vektoriaus  $\theta_e$  komponentu.

Veikiant nuo laiko  $t$  priklausomai KKA, tamprieji poslinkiai  $u_e(t)$  ir įrašos  $S_e(t)$  gali būti skaičiuojami naudojant influentines matricas  $\beta$  ir  $\alpha$ :

$$u_e(t) = \beta F(t), \ S_e(t) = \alpha F(t), \quad (2.4)$$

Influentinės matricos išreiškiamos taip:

$$\beta = (A D^{-1} A^T)^{-1}, \ \alpha = D^{-1} A^T \beta. \quad (2.5)$$

Kai konkreti apkrovimo istorija  $F(t)$  nežinoma, ji išreiškiama, kaip minėta 1.1 poskyryje, nuo laiko nepriklausomomis viršutinėmis ir apatinėmis kitimo ribomis  $F_{sup} = [F_{1,sup} F_{2,sup} \dots F_{m,sup}]^T$  ir  $F_{inf} = [F_{1,inf} F_{2,inf} \dots F_{m,inf}]^T$  taip, kad  $F_{inf} \leq F(t) \leq F_{sup}$ . Tuomet, tamprus skaičiavimo įrašos ir poslinkiai nustatomi naudojant (2.4) formules kiekvienai apkrovimo srities viršūnei  $j$ :

$$u_{e,j} = \beta F_j, S_{e,j} = \alpha F_j, j \in J. \quad (2.6)$$

### 2.1.2. Tampriosios plastinės diskretinės sistemos priklausomybės

Plastinėje konstrukcijų analizėje įprastai naudojamas tampriųjų ir liekamųjų dydžių komponentų atskyrimas:

$$u_j = u_{e,j} + u_r; S_j = S_{e,j} + S_r, j \in J. \quad (2.7)$$

Elemento laikomąją galią nusako ribinė įraša  $S_{0k}(x)$ . Disertacijoje tariama, kad  $k$ -ojo ( $k \in K$ ) elemento ribinė įraša yra pastovi  $S_{0k}(x) = const$ , o jos konkreti išraiška priklauso nuo elemento tipo (santvaros elementui tai yra ribinė ašinė jėga  $N_{0k}(x) = \sigma_y A = const$ , lenkiamai homogeniško skerspjuvio plokštei – ribinis lenkimo momentas  $M_{0k}(x) = f_y h^2 / 4 = const$ ). Takumo sąlygų užrašymo bendrumui naudojama plastiškumo konstantos  $C_k = f(S_{0k})$  sąvoka

$$f_{kl}(S_{ekl}(t) + S_{rkl}) \leq C_k. \quad (2.8)$$

Atsižvelgiant į lygtis (2.7), šios takumo sąlygos yra užrašytos kiekvieno elemento  $k$  kiekvienam mazgui  $l$ , tuomet kiekvienai tampriųjų įrašų hodorafo viršūnei  $j$  (2.6) sąlygos perrašomos:

$$\varphi_{kl,j} = C_k - f_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl}) \geq 0, k \in K, l \in L, j \in J. \quad (2.9)$$

Takumo sąlygos gali būti užrašomos ir kiekvienam pjūviui  $i \in I$  ir kiekvienai įrašų kombinacijai  $j \in J$ :  $\varphi_{i,j} = C_i - f_{i,j}(S_{ei,j} + S_{ri}) \geq 0$ . Tuomet visai konstrukcijai takumo sąlygos matricine forma yra:

$$\varphi_j = C - f_j(S_{e,j} + S_r) \geq 0, j \in J. \quad (2.10)$$

Tokiu būdu takumo sąlygos yra tenkinamos pakeičiant detalų apkrovimo istorijos  $\mathbf{F}(t)$  nagrinėjamą pseudotampriųjų įrašų vektoriais  $\mathbf{S}_{ej}$ .

Pagal Melano teoremą *statiškai leidžiamos* liekamosios įrašos  $\mathbf{S}_r = [S_{r1} \ S_{r2} \ ... \ S_{rn}]^T$  yra tokios, kurios tenkina pusiausvyros lygtis

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

ir takumo sąlygas (2.10).

Tuomet pagal kinematinę prisitaikomumo teoremą *kinematiškai leidžiami* liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r = [u_{r1} \ u_{r2} \ ... \ u_{rm}]^T$  tenkina geometrinės lygtis

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p \quad (2.12)$$

ir kinematinės kraštines sąlygas. Plastinių deformacijų vektoriaus  $\boldsymbol{\theta}_p = [\theta_{p1} \ \theta_{p2} \ ... \ \theta_{pn}]^T$  komponentai skaičiuojami pagal priklausomybę:

$$\boldsymbol{\theta}_p = (\boldsymbol{\theta}_{pkl})^T, \quad \boldsymbol{\theta}_{pkl} = \sum_j \left[ \nabla \varphi_{kl,j} (\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl}) \right]^T \boldsymbol{\lambda}_{kl,j},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{kl,j} \geq 0; \quad k \in K, \quad l \in L, \quad j \in J. \quad (2.13)$$

Čia išraiška

$$\left[ \nabla \varphi_{kl,j} (\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl}) \right]^T = \left[ \frac{\partial f_{kl,j} (\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl})}{\partial \mathbf{S}_{rkl}} \right] \quad (2.14)$$

yra takumo sąlygų (2.9) gradientų matrica, o  $\boldsymbol{\lambda}_{kl,j}$  – plastinis daugiklis. Vėliau bus pademonstruota, kad plastiniai daugikliai tenkina matematinio programavimo griežtumo sąlygas  $\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[ \mathbf{C} - \mathbf{f}_j (\mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r^*) \right] = 0, \quad j \in J.$

Liekamosios deformacijos  $\boldsymbol{\theta}_r = [\theta_{r1} \ \theta_{r2} \ ... \ \theta_{rn}]^T$  skaičiuojamos iš lygties:

$$\boldsymbol{\theta}_r = \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p. \quad (2.15)$$

Kaip minėta 1.3.3 skirsnyje, liekamosios deformacijos  $\boldsymbol{\theta}_r$  ir liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  prisitaikiusioje konstrukcijoje gali būti ne vieninteliai: jie priklauso

nuo konkrečios apkrovimo istorijos  $F(t)$ . Jeigu vertinamos tik viršutinės ir apatinės apkrovos kitimo ribos  $F_{sup}$ ,  $F_{inf}$ , tikslus liekamųjų poslinkių nustatymas tampa labai sudėtingas dėl galimo pjūvių nusikrovimo fenomeno. Todėl čia būtina pabrėžti, kad disertacijoje nagrinėjamuose pagrindiniuose optimizavimo modeliuose (išskyrus inkrementinę analizę) nusikrovimo efektas nėra vertinamas ir tiksliai galima nustatyti tik liekamųjų poslinkių variacijos ribas  $u_{r,inf} \leq u_r(t) \leq u_{r,sup}$  (Capurso 1974; Capurso *et al.* 1978; Lange-Hansen 1998; Maier 1970; Merkevičiūtė *et al.* 2003; Ponter 1972).

## 2.2. Konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvio analizės uždavinys

**Statinė analizės uždavinio formuluotė.** Prisitaikiosios konstrukcijos liekamųjų įrašų vektorius  $S_r$  gaunamas išsprendus statinės formuluotės analizės uždavinį. Tokia formuluotė išreiškia papildomos deformavimo energijos minimumo principą (Maier 1969; Čyras 1983): *iš visų statiškai leidžiamų vektorių  $S_r$ , tikrasis yra tas, kuris atitinka prisitaikiosios konstrukcijos papildomos deformavimo energijos minimumą.*

Prisitaikiusiai konstrukcijai, papildoma deformavimo energija  $\mathcal{F}'$  išreiškia liekamosiomis įrašomis:  $\mathcal{F}'(S_r) = \frac{1}{2} S_r^T D S_r$ , ir suformuluojamas toks matematinio programavimo uždavinys:

$$\min \left( \mathcal{F}'(S_r) = \frac{1}{2} S_r^T D S_r \right) = a^*, \quad (2.16)$$

kai

$$A S_r = 0, \quad (2.17)$$

$$S_0 - f_j(S_r + S_{e,j}) \geq 0, \quad \forall j \in J. \quad (2.18)$$

(2.16)–(2.18) uždavinys yra iškilasis kvadratinio matematinio programavimo uždavinys, taigi jo sprendinys yra vienintelis ir bus žymimas  $S_r^*$ .

Norint pagrįsti, kad analizės uždavinys turi optimalų sprendinį, jam užrašomos Kuno ir Takerio sąlygos.

Optimaliam sprendiniui  $\mathbf{S}_r^*$  jos formuluojamos taip (Bazaraa *et al.* 2006):

$$\nabla \mathcal{F}'(\mathbf{S}_r^*) + \sum_j \left[ \nabla^T \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{e,j}) \right] \lambda_j - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

$$\lambda_j^T \left[ \mathbf{S}_0 - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_r^* + \mathbf{S}_{e,j}) \right] = 0, \quad (2.20)$$

$$\lambda_j \geq \mathbf{0}, \quad \forall j \in J. \quad (2.21)$$

Kuno ir Takerio sąlygos teigia: sprendinys  $\mathbf{S}_r^*$  yra globalusis, jei egzistuoja tokie daugikliai  $\lambda_j$  ( $j \in J$ ) ir  $\mathbf{u}_r$ , kurie tenkina (2.19)–(2.21) sąlygas.

Galima pažymėti, kad (2.19) sąlygos (kartu su (2.20) ir (2.21)) yra konstrukcijos geometrinės lygtys. Šiuo atveju  $\lambda_j$  įgyja plastinių daugiklių, o  $\mathbf{u}_r$  liekamųjų poslinkių fizinę prasmę. Taigi savo esme Kuno ir Takerio sąlygos yra dualios kinematinės analizės uždavinio formuluotės apribojimai (Atkočiūnas *et al.* 2008).

**Kinematinė analizės uždavinio formuluotė.** Pristaikiusios konstrukcijos liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  skaičiuojami sprendžiant kinematinę analizės uždavinio formuluotę, t. y. uždavinį, dualų statinei formuluotei (2.16)–(2.18):

$$\max \left\{ \mathcal{F}''(\mathbf{S}_r, \mathbf{u}_r, \lambda_j) = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r - \sum_j \lambda_j^T \left[ \nabla \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r) \right] \mathbf{S}_r - \sum_j \lambda_j^T \left[ \mathbf{C} - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r) \right] \right\} = a^*, \quad (2.22)$$

kai

$$\mathbf{D} \mathbf{S}_r + \sum_j \left[ \nabla \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r) \right]^T \lambda_j - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

$$\lambda_j \geq \mathbf{0}, \quad \forall j \in J. \quad (2.24)$$

Uždavinio apribojimai (2.23) ir (2.24) yra geometrinės lygtys  $\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \boldsymbol{\theta}_r$  (tai paaiškina Lagranžo daugiklių  $\lambda_j$  ( $j \in J$ ) ir  $\mathbf{u}_r$  prasmę (2.19) lygtyje). Optimalus (2.22)–(2.24) uždavinio sprendinys yra vektoriai  $\mathbf{S}_r^*$ ,  $\mathbf{u}_r^*$  ir  $\lambda_j^*$  (žinoma,

tai galioja tik tada, jei ignoruojamas galimas nusikrovimo efektas). Liekamųjų įrašų vektorius yra lygiai toks pats kaip ir statinės formuluotės sprendinys. Šios kinematinės analizės uždavinio formuluotės sprendinys yra susietas su matematinio programavimo griežtumo sąlyga:

$$\lambda_j^{*T} \left[ C - f_j \left( S_{e,j} + S_r^* \right) \right] = 0, \lambda_j^* \geq 0, \forall j \in J. \quad (2.25)$$

Jeigu (2.22) tikslo funkcijos ženklas pakeičiamas priešingu, gaunamas uždavinys atitinkantis suminės potencinės energijos minimumo principą: *iš visų kinematiškai leidžiamų liekamųjų poslinkių  $u_r$ , tikrasis yra tas, kuris atitinka prisitaikiusios konstrukcijos pilnutinės potencinės energijos minimumą*. Taigi kinematinė uždavinio formuluotė apima Kuno ir Takerio sąlygas (2.19)–(2.21).

### 2.3. Influentinės liekamųjų įrašų ir liekamųjų poslinkių matricos

Uždavinio apribojimai (2.17) ir (2.18) kartu su Kuno ir Takerio sąlygomis (2.19)–(2.21) sudaro pilnąją prisitaikiusios konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvio lygčių sistemą (Oilerio ir Lagranžo uždavinys):

$$\left. \begin{aligned} AS_r &= 0, \\ C - f_j \left( S_r + S_{e,j} \right) &\geq 0, \\ \nabla \mathcal{F}'(S_r) + \sum_j \left[ \nabla^T f_j \left( S_r + S_{e,j} \right) \right] \lambda_j - A^T u_r &= 0, \\ \lambda_j^T \left[ C - f_j \left( S_r + S_{e,j} \right) \right] &= 0, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad \forall j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

(2.26) uždavinio sprendinį sudaro liekamosios įrašos  $S_r^*$ , liekamieji poslinkiai  $u_r^*$  ir plastiniai daugikliai  $\lambda_j^*$ .

Liekamosios įrašos ir liekamieji poslinkiai gali būti išreikšti plastinėmis deformacijomis:

$$u_r = \left[ \left( AD^{-1}A^T \right)^{-1} AD^{-1} \right] \theta_p = \overline{H} \theta_p, \quad (2.27)$$



$$\mathbf{S}_r = \left[ \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \left( \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \right] \boldsymbol{\theta}_p = \overline{\mathbf{G}} \boldsymbol{\theta}_p, \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\theta}_p = \sum_j \left[ \nabla f_j \left( \mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r \right) \right]^T \lambda_j, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{f}_j \left( \mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r \right) \geq \mathbf{0}, \quad (2.30)$$

$$\lambda_j^T \left[ \mathbf{C} - \mathbf{f}_j \left( \mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r \right) \right] = 0, \quad (2.31)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in J. \quad (2.32)$$

Čia  $\overline{\mathbf{G}}$  ir  $\overline{\mathbf{H}}$  yra atitinkamai liekamųjų įrašų ir liekamųjų poslinkių influentinės matricos (netiesinių takumo sąlygų atveju jos dauginamos iš plastinių deformacijų, todėl žymima su brūkšniu). Jeigu plastinės deformacijos  $\boldsymbol{\theta}_p^*$  yra žinomos, tuomet vienareikšmiškai randame įrašas ir poslinkius:  $\mathbf{S}_r^* = \overline{\mathbf{G}} \boldsymbol{\theta}_p^*$  ir  $\mathbf{u}_r^* = \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\theta}_p^*$ . Išraiškos (2.27) ir (2.28) galioja tik tuomet jei tenkinamos (2.30)–(2.32) sąlygos.

### Žordano transformacijos, taikomos analizės uždaviniui

(2.16)–(2.18) uždavinio modelis gali būti supaprastinamas eliminuojant pusiausvyros sąlygas  $\mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}$ . Pusiausvyros lygčių koeficientų matrica pertvarkoma į dvi dalis:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

čia  $\mathbf{A}^{(1)}$  – pamatricė, turinti atvirkštinę matricą (iš matricos  $\mathbf{A}$  gali būti atskirta ne viena tokia matrica, tačiau būtina ir vienintelė tokio parinkimo sąlyga yra atvirkštinės matricos egzistavimas). Tuomet atitinkamai į dvi dalis atskiriamos liekamosios įrašos  $\mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_r^{(1)} & \mathbf{S}_r^{(2)} \end{bmatrix}^T$  taip, kad pusiausvyros lygtys galėtų būti užrašomos  $\mathbf{A}_1 \mathbf{S}_r^{(1)} + \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_r^{(2)} = \mathbf{0}$ . Tuomet pilnas liekamųjų įrašų vektorius išreiškiamas panaudojus Žordano transformacijas:

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{B} \mathbf{S}_r^{(2)}. \quad (2.34)$$

Čia matrica  $\mathbf{B}$  yra:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Naudojant matricą  $\mathbf{B}$  statinė analizės uždavinio formuluotė gali būti perrašoma tokiu būdu:

$$\min \left( \mathcal{F}' \left[ \mathbf{S}_r^{(2)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{S}_r^{(2)} \right]^T \mathbf{BDB}^T \mathbf{S}_r^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{S}_r^{(2)} \right]^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{S}_r^{(2)} \right) = a^* \quad (2.36)$$

kai

$$\mathbf{S}_0 - \mathbf{f}_j \left( \mathbf{BS}_r^{(2)} + \mathbf{S}_{ej} \right) \geq \mathbf{0} \quad \forall j \in J. \quad (2.37)$$

Šio optimizavimo uždavinio sprendinys yra vektorius  $\mathbf{S}_r^{(2)*}$ , kuris supaprastintų lygčių sistemą (2.26).

## 2.4. Prisitaikomumo būvio optimizavimo uždaviniai

### 2.4.1. Bendroji optimizavimo uždavinio prisitaikomumo sąlygomis formuluotė

Tolydinio optimizavimo uždavinio modelis gali būti kuriamas nagrinėjant pilnąją prisitaikiosios konstrukcijos lygčių sistemą (2.26). Optimalumo kriterijumi pasirenkama skaliarinė ribinės įrašos funkcija  $\omega$ :  $\min \omega(\mathbf{S}_0)$  (Čyras, Atkočiūnas 1970; Čyras *et al.* 1974). Ribinių įrašų pasiskirstymo optimizavimo uždavinys yra svarbus praktiniam projektavimui, kai funkcija  $\omega$  išreiškia kainą ar kitą ekonominį konstrukcijos parametą.

Optimizavimo uždavinys formuluojamas taip: duotoms apkrovos kitimo riboms  $\mathbf{F}_{inf}$ ,  $\mathbf{F}_{sup}$  reikia rasti tokį ribinių įrašų vektorių  $\mathbf{S}_0$ , kuris tenkintų optimalumo kriterijų  $\min \omega(\mathbf{S}_0)$  ir prisitaikomumo bei standumo apribojimus:

$$\min \omega(\mathbf{S}_0), \quad (2.38)$$

kai

$$\mathbf{AS}_r = \mathbf{0}, \quad (2.39)$$

$$\phi_j = C(S_0) - f_j(S_{e,j}(S_0) + S_r) \geq 0, \quad (2.40)$$

$$D(S_0)S_r + \theta_p(S_0) - A^T u_r = 0, \quad (2.41)$$

$$\theta_p(S_0) = \sum_j \left[ \nabla f_j(S_{e,j}(S_0) + S_r) \right]^T \lambda_j \quad (2.42)$$

$$\lambda_j^T \left[ C(S_0) - f_j(S_{e,j}(S_0) + S_r) \right] = 0, \quad (2.43)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j = [\lambda_{1j} \lambda_{2j} \dots \lambda_{\zeta j}]^T, \quad (2.44)$$

$$S_0 \geq S_{0,\min}, \quad (2.45)$$

$$u_{\min} \leq u_{e,j}(S_0) + u_r \leq u_{\max}, \quad (2.46)$$

$$S_{e,j} = \alpha(S_0)F_j, \quad u_{e,j} = \beta(S_0)F_j \quad \forall j \in J. \quad (2.47)$$

Nežinomieji (2.38)–(2.47) uždavinys yra  $S_0$ ,  $S_r$ ,  $u_r$ ,  $\lambda_j$ . Tokio uždavinio neiškilumą lemia matematinio programavimo griežtumo sąlygos (2.43) ir (2.44). Formuliuotėje parodyta, kurie dydžiai tiesiogiai priklauso nuo elementų ribinių įrašų  $S_0$ . Liekamosios įrašos  $S_r$  taip pat priklauso nuo  $S_0$ , tačiau netiesiogiai – jų radimas iš esmės yra atskiras vidinis uždavinys: čia jis yra integruotas, kaip buvo parodyta (1.51)–(1.58) formuliuotėje. Kadangi apribojimai priklauso nuo uždavinio nežinomųjų (pasidavimo matrica priklauso nuo elementų skerspjūvių), toks uždavinys paprastai sprendžiamas iteraciniu būdu (Atkočiūnas, Blaževičius 2012). Pirmojoje iteracijoje uždavinys sprendžiamas su spėjamais (pradiniais) skerspjūvio parametrais ir gautas optimalus ribinių įrašų vektorius naudojamas naujos pasidavimo matricos  $D$  ir influentinėms matricoms  $\alpha$  ir  $\beta$  sudaryti, o tuomet ir naujoms tampriosioms įrašoms ir poslinkiams skaičiuoti. Tokios iteracijos kartojamos kol dviejų gretimų optimizavimo uždavinių sprendiniai sutampa norimu tikslumu. Apie tai bus daugiau rašoma sprendžiant konkrečius pavyzdžius trečiajame disertacijos skyriuje.

Leistinosios poslinkių kitimo ribos  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  naudojamos (2.46) lygtyse, gali būti nustatomos pagal taikomus projektavimo standartus (Blaževičius, Atkočiūnas 2014). Pagal eurokodo standartus konstrukcijos poslinkiai skaičiuojami pagal vadinamąsias charakteristines apkrovas, taigi, su mažesniu patikimumu negu stiprumo sąlygos. Apie dualistinį patikimumo ir saugos ribinių būvių taikymą išsamiau rašoma 2.5.3 poskyryje.

(2.38)–(2.47) uždavinio formuluotė šioje disertacijoje užrašoma ir praktiškai pritaikoma pirmą kartą. Iki šiol, prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždaviniai su poslinkių ribojimais buvo sprendžiami skaidant į kelis etapus (palyginimui (1.51)–(1.58) uždavinys (Atkočiūnas *et al.* 2007)). Disertacijos autorius pritaikė naujausius optimizavimo ir matematinio programavimo metodus *Matlab* terpėje, kad visas optimizavimo uždavinys galėtų būti sprendžiamas integraliai, net ir netiesinių takumo sąlygų atveju (tai bus pademonstruota skaitiniu plokštės optimizavimo pavyzdžiu ketvirtajame skyriuje). Galima teigti, kad šiuolaikiniai matematiniai skaičiavimo paketai (*Matlab* ir panašūs) jau sukuria galimybių išspręsti tokius sudėtingus optimizavimo uždavinius net asmeniniais kompiuteriais.

### 2.4.2. Transformuoti optimizavimo uždavinių modeliai

Optimizavimo uždavinio matematinis modelis (2.38)–(2.47) gali būti transformuotas eliminuojant pusiausvyros ir geometrines lygtis. Apie pusiausvyros lygčių eliminavimą buvo rašyta 2.3 poskyryje. Analogiškai gali būti pertvarkomos ir geometrines lygtys  $\mathbf{A}\mathbf{u}_r = \mathbf{D}\mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p$ .

**Pirmasis variantas.** Modelis (2.38)–(2.47) gali būti pertvarkytas eliminuojant iš geometrinių lygčių (2.41) liekamuosius poslinkius  $\mathbf{u}_r$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)T} \\ \mathbf{A}^{(2)T} \end{bmatrix} \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(1)} \\ \mathbf{D}^{(2)} \end{bmatrix} \mathbf{S}_r + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_p^{(1)} \\ \boldsymbol{\theta}_p^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{u}_r = \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{S}_r + \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \boldsymbol{\theta}_p^{(1)}, \quad (2.49)$$

čia  $\mathbf{A}^{(1)T}$  – transponuotos pusiausvyros lygčių koeficientų matricos pamatricė  $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{A}^{(2)} \end{bmatrix}^T$ , turinti atvirkštinę matricę (ji atitinka pamatricę  $\mathbf{D}^{(1)}$  iš pasidavimų matricos  $\mathbf{D}$  ir subvektorių  $\boldsymbol{\theta}_p^{(1)}$ ).

Geometrinės lygtys (2.41) pakeičiamos liekamųjų poslinkių darnos lygtimis (šių lygčių skaičius lygus konstrukcijos statinio neišsprendžiamumo laipsniui  $k_0 = n - m$ ):

$$\mathbf{A}^{(2)T} \left[ \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \left( \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p^{(1)} \right) \right] = \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p^{(2)},$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{A}^{(2)T} \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)} \right] \mathbf{S}_r &= \left[ -\mathbf{A}^{(2)T} \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1}; \mathbf{I} \right] \boldsymbol{\theta}_p, \\ \mathbf{B}_r \mathbf{S}_r &= \mathbf{B}_p \boldsymbol{\theta}_p, \end{aligned} \quad (2.50)$$

čia  $\mathbf{B}_r = \left[ \mathbf{A}^{(2)T} \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)} \right]$  ir  $\mathbf{B}_p = \left[ -\mathbf{A}^{(2)T} \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1}; \mathbf{I} \right]$ .

Naudojant šias lygtis (2.38)–(2.47) optimizavimo uždavinys pertvarkomas tokiu būdu:

$$\min \omega(\mathbf{S}_0), \quad (2.51)$$

kai

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (2.52)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \geq \mathbf{0}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{B}_r(\mathbf{S}_0) \mathbf{S}_r = \mathbf{B}_p \boldsymbol{\theta}_p(\mathbf{S}_0), \quad (2.54)$$

$$\boldsymbol{\theta}_p(\mathbf{S}_0) = \sum_j \left[ \nabla \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \right]^T \boldsymbol{\lambda}_j \quad (2.55)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[ \mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \right] = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{S}_0 \geq \mathbf{S}_{0,\min}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{e,j}(\mathbf{S}_0) + \left[ \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \left( \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{S}_0) \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p^{(1)}(\mathbf{S}_0) \right) \right] \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{S}_{e,j} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{S}_0) \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{e,j} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{S}_0) \mathbf{F}_j, \quad \forall j \in J. \quad (2.59)$$

(2.51)–(2.59) uždavinio nežinomieji yra  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_r$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_j$ . Plastinių deformacijų vektorius  $\boldsymbol{\theta}_p = \left[ \boldsymbol{\theta}_p^{(1)} \boldsymbol{\theta}_p^{(2)} \right]^T = \left[ \boldsymbol{\theta}_{p1} \boldsymbol{\theta}_{p2} \dots \boldsymbol{\theta}_{pn} \right]^T$  sudarytas atitinkamai kaip pertvarkytosios geometrinės lygtys (2.50). Uždavinio formuluotėje nebelieka liekamųjų poslinkių  $\mathbf{u}_r$  kaip nežinomųjų. Tokie pertvarkymai gali būti svarbūs kai sprendžiami netiesinio optimizavimo uždaviniai.

**Antrasis variantas.** Tolesnis (2.51)–(2.59) modelio pertvarkymas įmanomas eliminuojant pusiausvyros lygtis, kaip tai buvo padaryta analizės uždavinyje 2.3 poskyryje.

Prisimenant (2.34) ir (2.35) išraiškas:

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{B}_p^T \mathbf{S}_r^{(2)}, \quad \mathbf{B}_p^T = \begin{bmatrix} -\left(\mathbf{A}^{(1)}\right)^{-1} \mathbf{A}^{(2)} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinys gali būti transformuojamas taip:

$$\min \omega(\mathbf{S}_0), \quad (2.60)$$

kai

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{B}_p^T \mathbf{S}_r^{(2)}) \geq \mathbf{0}, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{B}_r(\mathbf{S}_0) \mathbf{B}_p^T \mathbf{S}_r^{(2)} = \mathbf{B}_p \boldsymbol{\theta}_p, \quad (2.62)$$

$$\boldsymbol{\theta}_p(\mathbf{S}_0) = \sum_j \left[ \nabla \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{B}_p^T \mathbf{S}_r^{(2)}) \right]^T \boldsymbol{\lambda}_j, \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[ \mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{B}_p^T \mathbf{S}_r^{(2)}) \right] = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{S}_{0,\min} \leq \mathbf{S}_0, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{e,j} + \left[ \left(\mathbf{A}^{(1)T}\right)^{-1} \left(\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{S}_0) \mathbf{B}_p^T \mathbf{S}_r^{(2)} + \boldsymbol{\theta}_p^{(1)}\right) \right] \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{S}_{e,j} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{S}_0) \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{e,j} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{S}_0) \mathbf{F}_j, \quad \forall j \in J. \quad (2.67)$$

Palyginti su ankstesniu (2.51)–(2.59) modeliu, šiame apribojimų ir nežinomųjų skaičius yra dar labiau sumažintas: nežinomieji yra tik  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_r^{(2)}$  ir  $\boldsymbol{\lambda}_j$ . Nors ši formuluoė yra pati trumpiausia, autoriaus patirtis rodo, kad skaitinė jos realizacija yra sudėtingesnė nei kitų optimizavimo modelių ir reikalauja daugiau kompiuterinio skaičiavimo laiko.

### 2.4.3. Optimizavimo uždavinys tiesinių takumo sąlygų atveju

Strypinių elementų takumo kriterijus dažnai išreiškiamas tiesinėmis lygtimis (Atkočiūnas, Karkauskas 2010; Jankovski, Atkočiūnas 2011, 2010), tuomet visos konstrukcijos takumo sąlygas (2.10) galima užrašyti matriciniu pavidalu taip:

$$\varphi_j = \mathbf{S}_0 - \Phi(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (2.68)$$

čia  $\Phi$  – vadinama takumo matrica, kurioje yra takumo sąlygų koeficientai.

Tiesinėmis (ar tiesinėmis dalimis – *piecewise linear*) takumo sąlygomis liekamieji poslinkiai ir liekamosios įrašos gali būti patogiai išreikštos plastiniais daugikliais  $\lambda$ , atitinkamai  $\mathbf{u}_r = \mathbf{H}\lambda$  ir  $\mathbf{S}_r = \mathbf{G}\lambda$ . Influentinės liekamųjų poslinkių ir liekamųjų įrašų matricos priklauso nuo uždavinio iteracijoje nekintančių dydžių – pusiausvyros, pasidavimo ir takumo matricių:

$$\mathbf{H} = \left( \left( \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1} \right) \Phi, \quad \mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T \mathbf{H} - \mathbf{D}^{-1}\Phi. \quad (2.69)$$

Tuomet prisitaikančios konstrukcijos bendrasis tolydinės optimizacijos uždavinys (2.38)–(2.47) supaprastėja:

$$\min \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0, \quad (2.70)$$

kai

$$\varphi_j = \mathbf{S}_0 - \Phi(\mathbf{G}\lambda + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (2.71)$$

$$\lambda_j^T \varphi_j = 0, \quad \lambda_j \geq \mathbf{0}, \quad \lambda = \sum_j \lambda_j, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{S}_{0,\inf} \leq \mathbf{S}_0 \leq \mathbf{S}_{0,\sup}, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{H}\lambda \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad \forall j \in J. \quad (2.74)$$

(2.70)–(2.74) uždavinio nežinomieji yra ribinių įrašų  $\mathbf{S}_0$  ir plastinių daugiklių  $\lambda$  vektoriai. Šio uždavinio trūkumas, kaip minėta, yra tas, kad ignoruojamas galimas nusikrovimo fenomenas ir poslinkiai negali būti nustatyti visiškai tiksliai, nenagrinėjant apkrovimo istorijos.

## 2.5. Projektavimų standartų taikymas optimizuojant konstrukcijas

### 2.5.1. Elementų klupumo įvertinimas

Elementų stabilumo (klupumo) sąlygas patogiausia analizuoti pradedant nuo santvaros elementų, veikiamų tik vienašio įtempių būvio. Tokio elemento stiprumo sąlygos, vertinant tik ašinę jėgą  $N$ , gali būti užrašomos taip:

$$\text{tempimui } \varphi_{\max} = N_0 - G\lambda - N_{e,\max} \geq 0, \quad (2.75)$$

$$\text{gniuždymui } \varphi_{\min} = N_{0,cr} + G\lambda + N_{e,\min} \geq 0. \quad (2.76)$$

Ribinė gniuždymo ašinė jėga  $N_{0,cr}$  nustatoma pagal galiojančius projektavimo standartus. Ši jėga skirtinga kiekvienam santvaros elementui ir nusako jo klupdomąją galią (įvertina elemento liaunį, įtvirtinimo sąlygas ir kt.). Gniuždymo ribinė jėga neviršija tempimo ribinės ašinės jėgos  $N_0$ , kuri įprastai nustatoma pagal skerspjūvio plotą  $A$  ir plieno takumo įtempį  $f_y$ :  $N_{0,cr} \leq N_0 = f_y \cdot A$ .

Kaip minėta, matematiniame konstrukcijos optimizavimo modelyje yra Kuno ir Takerio sąlygos (tarp jų ir (2.72) matematinio programavimo griežtumo sąlyga) (Tin-Loi 2000). Taikant stiprumo sąlygas atskirai tempiamiesiems ir gniuždomiesiems (sumažinto atsparumo) elementams, atskiriami ir plastiniai daugikliai susieti su šiomis sąlygomis:  $\lambda = [\lambda_{\max}, \lambda_{cr}]^T \geq 0$ :

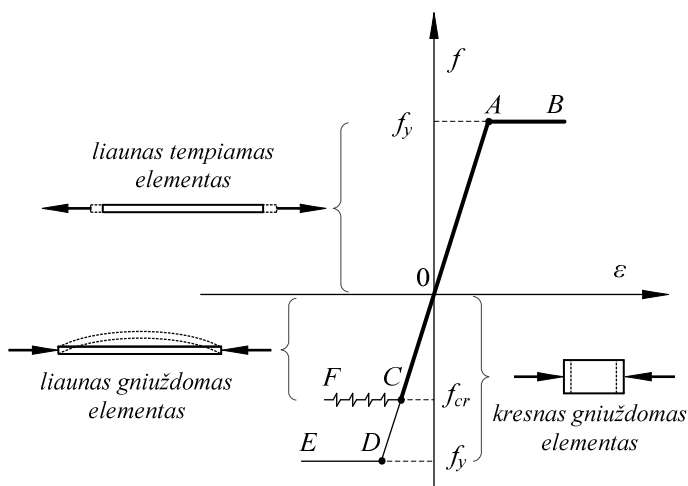
$$\lambda_{\max}^T \varphi_{\max} = 0, \quad \lambda_{cr}^T \varphi_{\min} = 0. \quad (2.77)$$

Pagal asociatyvinį plastinio tekėjimo dėsnį šie daugikliai tiesiogiai susieti su skerspjūvyje atsirandančiomis plastinėmis deformacijomis. Disertacijoje idealiai tamprių plastinių elementų įtempių ir deformacijų būvis aprašomas vadinamąja Prantlio diagrama (2.1 pav.). Šia diagrama ir bus pasinaudota analizuojant klupdomųjų elementų plastinę elgseną.

Akivaizdu, kad plastinės deformacijos tempiamame strype atsiranda, kai įtempis pasiekia takumo ribą, t. y. kai  $f = f_y$ . Jeigu elemento susilpnėjimas dėl stiprumo nėra vertinamas, tariama, kad diagrama yra simetrinė ir gniuždymo takumo įtempio riba yra tokia pati kaip tempimo:  $f = f_y$ . Pagal eurokodo normas gniuždydas gali būti nevertinamas kresnų elementų, kurių santykinis liaunis yra  $\bar{\lambda} \leq 0,2$  (čia žymėjimas naudojamas toks kaip EC3 ir neturėtų būti supainiotas su plastiniu daugikliu). Kai elemento galios sumažėjimą dėl klupumo



būtina vertinti, bendruoju atveju jo įtempių ir deformacijų diagrama yra  $0-C-F$ . Tačiau plastinių deformacijų atsiradimas, pasiekus klupdymo ribą (t. y. elementui praradus stabilumą), nėra apibrėžtas eurokodo standarte ir nėra įvertinamas. Taigi tikroji gniuždomo elemento deformavimo kreivė yra tik tamprioji  $0-C$ , kai taškas  $C$  nesutampa su tašku  $D$  arba tamprioji plastinė  $0-D-E$ , kai  $C$  sutampa su  $D$ . Taigi minėtos matematinio programavimo griežtumo sąlygos prieštarauja standarto reikalavimams ir nėra pakankamos norint užtikrinti konstrukcijos pritaikomumo būvį.



**2.1 pav.** Idealiai tamprios-plastinės konstrukcijos įtempių ir deformacijų diagrama

**Fig. 2.1.** Stress-strain graph of perfectly elastic-plastic material

Šis neatitikimas pašalinamas matematinio programavimo uždavinyje naudojant naują disertacijos autoriaus pasiūlytą sąlygą, kuri užtikrina, kad plastiniai daugikliai (vadinasi, ir plastinės deformacijos) gali atsirasti tik dėl tempiamųjų arba gniuždomųjų labai kresnų elementų takumo įtempių:

$$\lambda_{cr,k} (N_{0,k} - N_{0,cr,k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad k \in K. \quad (2.78)$$

Jeigu  $k$ -asis konstrukcijos elementas yra kresnas, tuomet pagal EC3 jo klupumo redukcijos koeficientas yra vienetinis ( $\chi = 1$ ) ir ribinė ašinė jėga  $N_{0,cr,k} = \chi \cdot N_{0,k} = N_{0,k}$ . Tokiu atveju, (2.78) sąlyga leidžia plastiniam daugikliui įgyti teigiamąją nenulinę reikšmę  $\lambda_{cr,k} \geq 0$  ir susiformuoti plastinėms deformacijoms (prisimenant (2.13) išraišką). Jeigu klupumo stipris turi būti sumažintas ( $N_{0,b,k} < N_{0,k}$ ), (2.78) sąlyga tenkinama tik jeigu  $\lambda_{cr,k} = 0$ .

Pasiūlyta nauja sąlyga užtikrina, kad liaunų elementų gniuždymo sąlygos nesukeltų nenulinių plastinių daugiklių atsiradimo. Tai yra esminė užduotis, nes vėliau šie daugikliai naudojami liekamosioms įrašoms ir deformacijoms skaičiuoti tame pačiame optimizavimo uždavinyje. Tokia disertacijoje aprašoma ir taikoma sąlyga yra esminis skirtumas lyginant su anksčiau publikuotais panašių uždavinių sprendimo algoritmais (Atkočiūnas, Venskųs 2011; Kaliszky, Lógó 2002; Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2006).

### 2.5.2. Eurokodo stiprumo sąlygos rėminėms konstrukcijoms

Rėminėms konstrukcijoms, kurių elementai veikiami ašinių jėgų ir lenkimo momentų tuo pačiu metu, taikomos sudėtingesnės takumo sąlygos, palyginti su santvariniais elementais. Tokių sąlygų sukurta nemažai ir jos priklauso nuo daugelio veiksnių: elementų skerspjūvio formos, medžiagos, gamybos technologijos ir kt. (Skordeli, Bisbos 2010). Standartiniais profiliuociams dažniausiai taikomos ištiesintosios takumo sąlygos (angl. *piecewise linear*), kaip buvo aprašyta 1.4.3 poskyryje ir parodyta 1.8 paveiksle.

Europoje projektuojamoms konstrukcijoms paprastai taikomas eurokodo standartuose (EC3 §6.2.9) nustatytas takumo kriterijus:

$$M_{Ed} \leq M_{N,Rd}, \quad (2.79)$$

čia  $M_{N,Rd}$  – skaičiuojamasis plastinis atsparumo momentas, sumažintas dėl  $N_{Ed}$  ašinės jėgos poveikio. Toliau disertacijoje bus nagrinėjamos stačiakampių dėžinių skerspjūvių elementai, kurių sienelės storis pastovus. Tokiems elementams gali būti taikoma supaprastinta formulė:

$$M_{N,Rd} = M_{pl,Rd} (1 - n) / (1 - 0,5a_w), \text{ tačiau } M_{N,Rd} \leq M_{pl,Rd} \quad (2.80)$$

čia  $a_w = (A - 2bt) / A$ , ir  $a_w \leq 0,5$ .

Pagal EC3 §6.3.3, elementai, kurie veikiami lenkimo momento ir gniuždančios ašinės jėgos, turi tenkinti tokias sąlygas:

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{\frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{yz} \frac{\frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}}}{\gamma_{M1}} \leq 1, \quad (2.81)$$

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{\frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}}}{\gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{\frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\gamma_{M1}}}{\gamma_{M1}} \leq 1, \quad (2.82)$$

čia  $N_{Ed}$ ,  $M_{y,Ed}$  ir  $M_{z,Ed}$  – skaičiuojamosios gniuždančios ašinės jėgos ir lenkimo momentų apie  $y$ - $y$  ir  $z$ - $z$  ašis reikšmės;  $\Delta M_{y,Ed}$  ir  $\Delta M_{z,Ed}$  yra momentai dėl susidariusių ekscentricitetų;  $\chi_y, \chi_z$  – klupumo redukcijos koeficientai;  $\chi_{LT}$  – klupumo redukcijos koeficientas dėl šoninio sukamojo klupumo;  $k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$  – sąveikos koeficientai.

Stiprumo ir stabilumo sąlygos kiekvienam plokščio rėmo skaičiuojamajam pjūviui gali būti gaunamos transformuojant (2.80)–(2.82) lygtis:

$$\varphi_{ij,st} = \frac{1-n_i}{1-0,5a_{w,i}} M_{0,i} - (M_{r,i} + M_{ei,j}) \geq 0, \quad (2.83)$$

$$\varphi_{ij,cr} = M_{0,i} - k_{yy,i} (M_{r,i} + M_{ei,j}) - \frac{c_i}{\chi_i} (N_{r,i} + N_{ei,j}) \geq 0. \quad (2.84)$$

Skaičiuojamojo pjūvio įtempių būvis aprašomas liekamosiomis ir tampriomis įraižomis  $S_{i,j} = S_{ri} + S_{ei,j}$ ,  $S_{i,j} = \begin{bmatrix} M_{ri} + M_{ei,j} \\ N_{ri} + N_{ei,j} \end{bmatrix}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ .

Tuomet tiesinės takumo sąlygos gali būti išreiškiamos patogesne forma, pritaikius takumo koeficientų ir konfigūracijos matricas:

$$\Phi_{i,st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Pi_{i,st} = \begin{bmatrix} \frac{1-n_i}{1-0,5a_{w,i}} \\ \frac{1-n_i}{1-0,5a_{w,i}} \end{bmatrix}; \quad (2.85)$$

$$\Phi_{i,cr} = \begin{bmatrix} k_{yy,i} & -\frac{c_i}{\chi_i} \\ -k_{yy,i} & -\frac{c_i}{\chi_i} \end{bmatrix}; \quad \Pi_{i,cr} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Šios matricos gali būti tiesiogiai taikomos (2.70)–(2.74) pritaikančių rėminių konstrukcijų optimizavimo uždavinyje. Visiems rėminės konstrukcijos

pojūvams  $i \in I$  ir kiekvienai apkrovimo srities viršūnei  $j$  stiprumo ir klupumo sąlygos atitinkamai užrašomos taip:

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,st} = \boldsymbol{\Pi}_{st} \mathbf{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}_{st} (\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J. \quad (2.87)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,cr} = \boldsymbol{\Pi}_{cr} \mathbf{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}_{cr} (\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J. \quad (2.88)$$

Tokios sąlygos bus taikomos optimizuojant rėmines konstrukcijas 3.5 poskyryje.

### 2.5.3. Poslinkių ribojimai pagal eurokodą

Eurokodo standarte taikant dalinių patikimumo koeficientų metodą, konstrukcijos projektuojamos tikrinant dviejų ribinių būvių – saugos ir tinkamumo – nepažeidžiamumą. Šiems būviams taikomi skirtingi patikimumo lygiai, kurie dalinių koeficientų metodu gaunami pritaikius atitinkamas reprezentacines poveikių reikšmes. Stiprumo ir stabilumo apribojimai skirti saugos ribiniam būviui užtikrinti. Tačiau konstrukcijos laikomos patikimomis ir tinkamomis eksploatuoti tik tuomet, kai nė vienas iš ribinių būvių nėra pažeistas. Todėl, siekiant užtikrinti tinkamumo ribinio būvio reikalavimus, į konstrukcijos optimizavimo modelį turi būti įtraukiami ir poslinkių apribojimai (Atkočiūnas *et al.* 1981; Blaževičius, Atkočiūnas 2014; Tin-Loi 2000). Juos galima perrašyti taip:

$$\mathbf{u}_{\inf} \leq (\mathbf{u}_r + \bar{\mathbf{u}}_{ej}) \leq \mathbf{u}_{\sup}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad j \in J, \quad (2.89)$$

čia  $\mathbf{u}_{\inf}$  ir  $\mathbf{u}_{\sup}$  – suminių (tamprios ir liekamosios dalies) poslinkių apatinės ir viršutinės normuotosios ribos. Tamprios idealiai plastinės santvaros poslinkiai susideda iš dviejų dalių – liekamųjų  $\mathbf{u}_r = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}$  (matrica  $\mathbf{H}$  nustatoma pagal (2.69) išraišką) ir pseudotampriųjų poslinkių  $\bar{\mathbf{u}}_{ej}$ . Liekamoji poslinkio dalis gaunama iš prisitaikomumo proceso (naudojant minėtus plastinius daugiklius  $\boldsymbol{\lambda}$  ir influentiinę matricą  $\mathbf{H}$ ), taigi ją lemia saugos ribinio būvis, o tai reiškia didelis patikimumas. Kitaip sakant, jie gaunami optimizuojant konstrukciją, veikiamą skaičiuotinės kintamosios kartotinės apkrovos. Taigi kiekvienai apkrovimo kombinacijai  $j$ :  $\mathbf{F}_{jd} = \gamma_E \cdot \mathbf{F}_{jk}$  (čia indeksai žymimi pagal EC:  $d$  – skaičiuotinis,  $k$  – charakteristinis;  $\gamma_E$  – apkrovos (efekto) dalinis patikimumo koeficientas). Pseudotampri poslinkių dalis skaičiuojama pagal Huko dėsnį, ją lemia tinkamumo ribinis būvis, tai reiškia mažesnis patikimumas. Ji skaičiuojama nuo charakteristinių kintamųjų kartotinių apkrovų visų kombinacijų:

$$\bar{\mathbf{u}}_{ej} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad j \in J. \quad (2.90)$$

Toks dviejų patikimumo lygių taikymas leidžia projektuoti ekonomišką konstrukciją, palyginti su ankstesnių tyrėjų pasiūlytais panašiais modeliais (Atkočiūnas *et al.* 2008), nes poslinkių ribojimui taikomas mažesnis patikimumas nei konstrukcijos stiprumui ir stabilumui užtikrinti.

## 2.6. Antrojo skyriaus išvados

1. Matematinio programavimo pagrįstiems prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių modeliams būtina nuosekli konstrukcijų diskretizacija. Pasitelkiant statinę prisitaikomumo teoremą, racionalu taikyti pusiausvirose baigtinius elementus.
2. Žordano transformacijos leidžia sumažinti prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo ir analizės uždavinių nežinomųjų skaičių.
3. Taikant tiesines elementų takumo sąlygas, galima supaprastinti optimizavimo esant prisitaikomumo būviui su poslinkių ribojimais uždavinio formuluotę. Tiesinėmis takumo sąlygomis liekamosios įrašos ir liekamieji poslinkiai gali būti išreikšti influentinėmis matricomis ir plastiniais daugikliais.
4. Elementų klupumo apribojimus būtina derinti su matematinio programavimo griežtumo sąlygomis ir teisingai įvertinti plastinių deformacijų radimąsi. Matematinio programavimo griežtumo sąlygos nėra pakankamos norint užtikrinti konstrukcijos prisitaikomumo būvį. Tam šiame skyriuje pristatytos papildomos optimizavimo uždavinio plastinių daugiklių ribojimo sąlygos. Taip kuriamos naujos santvarų rėmų optimizavimo uždavinių formuluotės.
5. Prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinyje galima suderinti eurokodo reglamentuojamus saugos ir tinkamumo ribinius būvius taikant skirtingus dalinius koeficientus poslinkių ribojimams ir prisitaikomumo sąlygoms.



---

## Skaitiniai strypinių konstrukcijų optimizavimo eksperimentai

Šiame disertaciniame darbe aprašytų eksperimentų tikslas – praktiškai išbandyti ir sukurtuosius prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo algoritmus. Skyrius pradedamas nuo santvarinių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematinių modelių, veikiant nepriklausomoms jėgoms ir, atskiru atveju, judančiai kartotinei apkrovai. Visuose uždaviniuose taikomos antrajame skyriuje aprašytos poslinkių ribojimo ir klupumo sąlygos, vertinama naujų, disertacijoje pasiūlytų, sąlygų įtaka optimaliam konstrukcijos sprendiniui. Atskirai šiame skyriuje atliktas tiesioginis tikimybinis santvarų optimizavimas, kai tiesiogiai ribojamas elementų patikimumas pagal EC metodikas.

Trečiasis poskyris skirtas inkrementinei-iteracinei skaičiavimo metodikai, leidžiančiai įvertinti nemonotonišką poslinkių kitimą santvaros prisitaikymo procese ir užtikrinti, kad standumo sąlygos nebus pažeistos.

Penktasis poskyris skirtas rėminių konstrukcijų optimizacijai. Nagrinėjami lenkiamieji rėmai vertinant ir ašinių jėgų įtaką stiprumui. Nuosekliai aprašomas tokių elementų taikymas ir konstrukcijų optimizacija įvairiais ribinių ir prisitaikomumo būvio atvejais. Rezultatai iliustruojamos disertacijoje pasiūlytos naujovės ir jų įtaka optimaliam konstrukcijos sprendiniui, bei plastinių deformacijų pasiskirstymui nagrinėjamose konstrukcijose. Skyriaus tematika disertacijos

autorius paskelbė keturis straipsnius (Blaževičius, Atkočiūnas 2014, 2011, 2015; Blaževičius, Šalna 2013).

### 3.1. Santvarų tūrio optimizavimas su klupumo ir poslinkių ribojimais

Autoriaus pasiūlytas pagerintas tampriosios plastinės santvaros tūrio optimizavimo uždavinys su poslinkių ir plastinių klupumo deformacijų apribojimais užrašomas taip:

$$\min \mathbf{L}^T \mathbf{A}, \quad (3.1)$$

kai

$$\boldsymbol{\varphi}_{\max} = N_0 - N_r - N_{e,\max} \geq \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\min} = N_{0,\text{cr}} + N_r + N_{e,\min} \geq \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\max}^T \boldsymbol{\varphi}_{\max} = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\text{cr}}^T \boldsymbol{\varphi}_{\min} = 0, \quad \boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_{\max}, \boldsymbol{\lambda}_{\text{cr}}] \geq \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

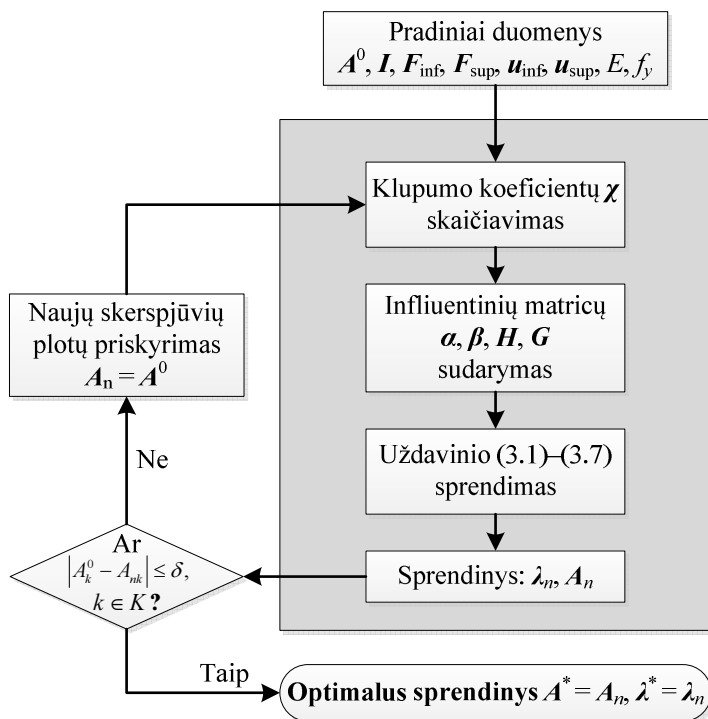
$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{cr},k} (N_{0,k} - N_{0,\text{cr},k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad k \in K, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{A}_{\min}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}_{\inf} \leq (\mathbf{u}_r + \bar{\mathbf{u}}_{ej}) \leq \mathbf{u}_{\sup}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad j \in J. \quad (3.7)$$

Modelio apribojimai apima (3.2)–(3.3) takumo sąlygas, matematinio programavimo griežtumo sąlygas (3.4), papildomas sąlygas plastiniams daugikliams (3.5), konstrukcinius apribojimus (3.6) ir poslinkių ribojimus (3.7).  $\mathbf{A}_{\min}$  yra minimalių skerspjūvio plotų vektorius, naudojamas konstrukciniuose apribojimuose (dažnai jis sudaromas pagal mazgų konstravimo, minimalaus liaunio ar kitus reikalavimus). (3.1)–(3.7) uždavinio nežinomieji yra elementų skerspjūvio plotai  $\mathbf{A}$  ir plastiniai daugikliai  $\boldsymbol{\lambda}$ . Influentinės tampriųjų įrašų, tampriųjų poslinkių, liekamųjų įrašų ir liekamųjų poslinkių matricos  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  priklauso nuo kintamųjų elementų skerspjūvio plotų. Todėl toks uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu (3.1 pav.). Toks modelis tinka ir tolydžiajai ir diskretinei optimizacijai. Autoriaus taikoma tolydžioji optimizacija yra paprastesnė skaitinės realizacijos prasme, tačiau pritaikoma ir praktiškai – pagal gautas tikslias reikšmes nesunku parinkti realius gaminamus skerspjūvius. Galutinė suprojektuota konstrukcija turėtų būti patikrinta analizės uždaviniu.





3.1 pav. Uždavinio sprendimo algoritmas  
Fig. 3.1. Flowchart of the proposed algorithm

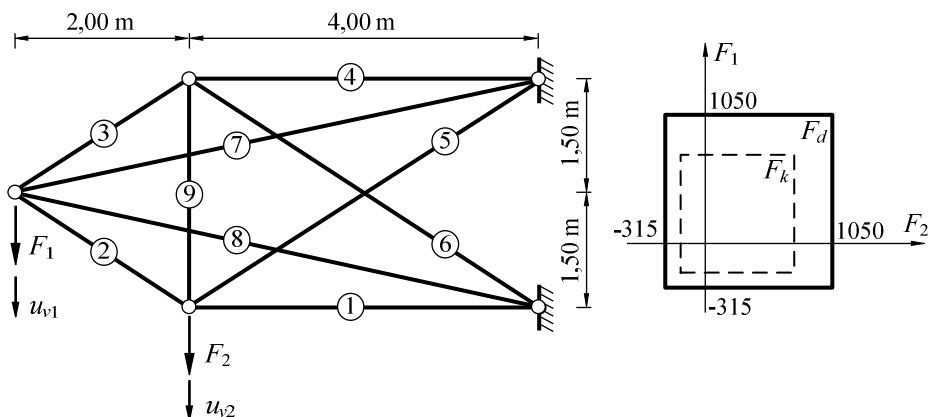
### 1 skaitinis eksperimentas. Santvara veikiama dviejų nepriklausomų jėgų

Nagrinėjamas santvaros, parodytos 3.2 paveiksle, tūrio minimizavimo uždavinys. Tokios geometrijos santvara jau buvo analizuota kelių autorių anksčiau (Kaliszky, Lógó 2002; Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2006; Tin-Loi 2000). Santvara apkrauta dviem nepriklausomomis apkrovomis: jėgomis  $F_1$  ir  $F_2$ . Charakteristinė ir skaičiuojamoji jėgų veikimo sritys (jos naudojamos skirtingiems ribiniams būviams įvertinti) taip pat parodytos 3.2 paveiksle (reikšmės kN; dalinis koeficientas  $\gamma_E = 1,5$ ). Pagrindinė užduotis – išspręsti (15)–(21) uždavinį, t. y. nustatyti elementų skerspjūvio plotus  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$  ir visos santvaros tūrį  $V$ . Santvaros strypai yra sugrupuoti:  $A_{g1} = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_9$ ;  $A_{g2} = A_5 = A_6$ ;  $A_{g3} = A_7 = A_8$ . Medžiagos tamprumo modulis yra  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ , o takumo įtempis  $f_y = 20 \text{ kN/cm}^2$ . Santvaros strypams priskirti minimalūs skerspjūvio plotai yra  $A_{g1,\min} = 8 \text{ cm}^2$ ,  $A_{g2,\min} = 5 \text{ cm}^2$ ,  $A_{g3,\min} = 5 \text{ cm}^2$ . Stabilumui tikrinti tariama, kad elementai yra apvalūs vamzdžiai kurių storis  $t_{g1} = 10 \text{ mm}$ ,  $t_{g2} = t_{g3} = 5 \text{ mm}$  (optimizuojant jų skersmuo skaičiuojamas pagal skerspjūvio plotą). Norint

įvertinti pakeitimus įvestus į matematinį modelį (3.1)–(3.7), analizuojami keli optimizavimo atvejai.

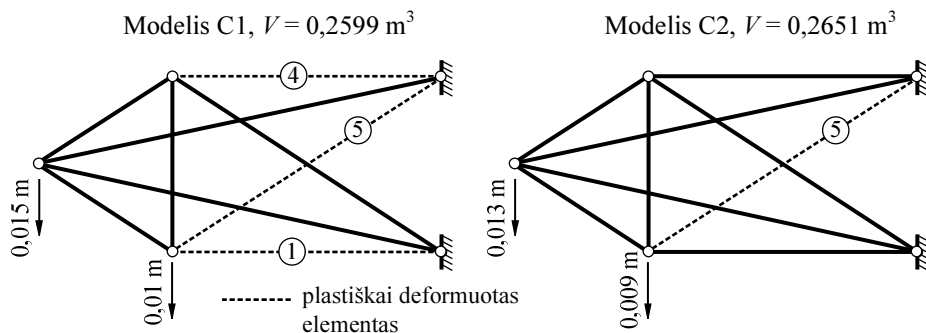
Atvejis C1 – santvaros optimizavimas pagal klasikinį tūrio minimizavimo modelį, t. y. (3.1)–(3.7), tačiau be (3.5) sąlygos.

Atvejis C2 – santvaros optimizavimas pagal visą siūlomą modelį (3.1)–(3.7).



3.2 pav. Santvaros geometriniai rodikliai ir apkrovimo sritys

Fig 3.2. Truss geometry and loading



3.3 pav. Santvaros plastinės deformacijos ir ribojami mazginiai poslinkiai

Fig 3.3. Truss plastic deformations and nodal displacements

Dualus poslinkių skaičiavimas pagal 2.5.3 skirsnyje aprašytą metodiką taikomas abiem atvejams. Įvesti tokie poslinkių ribojimai  $u_{v1} \leq 0,015$  m,  $u_{v2} \leq 0,01$  m (3.2 pav.). Skaitinio optimizavimo rezultatai pateikti 3.1 lentelėje. Santvaros plastinės deformacijos pavaizduotos 3.3 paveiksle. Gauti konstrukcijos tūriai: C1 –  $V^* = 0,2599$  m<sup>3</sup>, C2 –  $V^* = 0,2651$  m<sup>3</sup>.

**3.1 lentelė.** Tūrio minimizavimo rezultatai**Table 3.1.** Volume minimization results

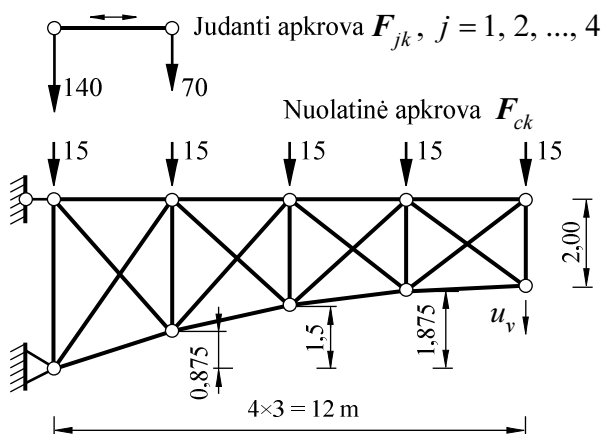
Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tempimo plastiniai daugikliai $\lambda_{\max} \cdot 10^3$									
C1	0,000	0,000	0,000	0,450	0,084	0,000	0,000	0,000	0,000
C2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,438	0,000	0,000	0,000	0,000
Gniuždymo plastiniai daugikliai $\lambda_{cr} \cdot 10^3$									
C1	1,096	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
C2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Liekamosios ašinės jėgos $N_r$ , kN									
C1	105,50	55,197	-1,397	14,954	-76,683	-20,090	47,820	-92,185	12,892
C2	37,988	-2,281	-9,656	26,188	-49,766	-42,391	14,044	-4,201	31,228
Optimalūs elementų grupių skerspjūvių plotai $A$ , cm <sup>2</sup>									
C1	76,684				69,206		54,974		76,684
C2	89,090				76,171		37,485		89,090

Papildomos plastinių daugiklių sąlygos (3.5) antru optimizavimo uždavinio atveju neleido plastinėms deformacijoms atsirasti gniuždomuosiuose elementuose, kaip tai įvyko C1 uždavinio atveju (pirmajame santvaros elemente). Taigi gauti skirtingi įtempių ir deformacijų būviai, skirtingas liekamųjų įrąžų pasiskirstymas ir kitokie pagrindiniai nežinomieji – skerspjūvių plotai. Antruoju optimizavimo atveju C2, trečiosios elementų grupės (7, 8 elementų) skerspjūvio plotai gauti mažesni nei pirmuoju atveju C1, o pirmos ir antros elementų grupių skerspjūviai gauti mažesni C1 atveju. Nors poslinkių ribojimai buvo vienodi abiem atvejais, rezultatai pastebimai skiriasi: pirmuoju atveju šie reikalavimai tenkinami kaip griežtos lygybės, o antruoju poslinkių ribojimuose lieka šiek tiek atsargos. Taigi dėl suvaržytos plastinių deformacijų radimosi galimybės pagal naująjį (3.1)–(3.7) matematinį modelį optimizuota konstrukcija yra standesnė.

**2 skaitinis eksperimentas. Santvara veikiamą judamos apkrovos**

Atskiras kintamosios kartotinės apkrovos atvejis yra judamoji apkrova. Šiuo atveju apkrovų dydžiai yra fiksuoti, tačiau ji gali užimti skirtingas padėtis ant konstrukcijos. Taigi apkrovimo istorija yra šių padėčių kitimo eiga. Kartais tokia istorija gali būti tiksliai žinoma, jeigu tai konkretaus sunkiojo transporto judėjimas ar kitas tiksliai aprašomas efektas. Šiame poskyryje nagrinėjamas bendriausias atvejis, kai istorija nežinoma ir kiekviena apkrovos pridėtinės vieta traktuojama kaip skirtinga apkrovų kombinacija, sudaranti vieną tariamos jėgų kitimo srities viršūnę  $j$ .

Metodika iliustruojama santvaros tūrio optimizavimo uždaviniu. Nagrinėjama santvara su paraboline apatine juosta, veikiamu nuolatinės (nekintamos) apkrovos  $F_c$  ir kintamos, judančios jėgų poros  $F_j$ . Santvara ir charakteristinės apkrovos reikšmės kN vaizduojamos 3.4 paveiksle. Skaičiuotinoms apkrovoms naudojami daliniai koeficientai yra  $\gamma_{Gj,\text{sup}} = 1,35$  judamai apkrovai ir  $\gamma_{Q,1} = 1,3$  pastoviai apkrovai. Sprendžiamas (3.1)–(3.7) optimizavimo uždavinys ir ieškomi santvaros elementų skerspjūvių plotai  $A$  ir bendras tūris  $V$ . Elementai yra sugrupuoti į keturias grupes: apatinė juosta  $A_1$ , viršutinė juosta  $A_2$ , vertikalieji tinklelio strypai (statramsčiai)  $A_3$  ir pasvirusieji tinklelio strypai (spyriai)  $A_4$ . Visiems strypams priskiriamos minimalios galimos skerspjūvio ploto reikšmės  $A_{1,\text{min}} = A_{2,\text{min}} = A_{3,\text{min}} = A_{4,\text{min}} = 0,006 \text{ m}^2$ . Santvara projektuojama iš kvadratinų stačiakampių (SHS) strypų, kurių pradiniai skerspjūvio matmenys parenkami tokie:  $b_1 = 16 \text{ cm}$ ,  $b_2 = 14 \text{ cm}$ ,  $b_3 = b_4 = 10 \text{ cm}$ . Šie dydžiai gali būti keičiami, atsižvelgiant į gautus optimizavimo rezultatus. Plieno takumo įtempis imamas  $f_y = 235 \text{ MPa}$ , tamprumo modulis –  $E = 210 \text{ GPa}$ .



3.4 pav. Santvaros geometrija ir apkrovimas

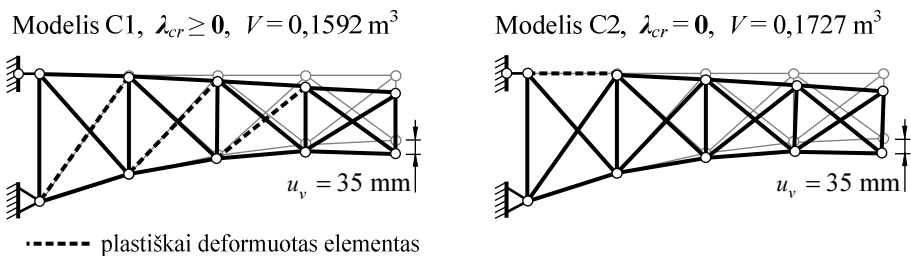
Fig. 3.4. Geometry and loading of the truss

Taikoma duali poslinkių skaičiavimo metodika aprašyta 2.5.3 poskyryje. Optimizuojant ribojamas santvaros galo vertikalusis poslinkis  $u_v \leq 35 \text{ mm}$  (3.4 pav.). Norint įvertinti pakeitimus, padarytus matematiniame modelyje (3.1)–(3.7), analizuojami keli optimizavimo atvejai.

Atvejis C1 – santvaros optimizavimas pagal klasikinį tūrio minimizavimo modelį, t. y. (3.1)–(3.7), tačiau be (3.5) sąlygos.

Atvejis C2 – santvaros optimizavimas pagal visą siūlomą modelį (3.1)–(3.7). Gauti rezultatai pateikiami 3.2 lentelėje. Santvaros plastinės deformacijos pateikiamos 3.5 pav.

Gauti optimalūs santvaros tūriai: C1 –  $V = 0,15916 \text{ m}^3$ , C2 –  $V = 0,17269 \text{ m}^3$ .



**3.5 pav.** Santvaros deformacijos ir optimalūs tūriai  
**Fig. 3.5.** Truss deformations and the optimal volumes

**3.2 lentelė.** Santvaros tūrio optimizavimo uždavinio rezultatai

**Table 3.2.** Results of the truss volume optimisation problem

Elementas		Apatinė juosta	Viršutinė juosta	Statramsčiai	Spyriai
C1	$A, \text{m}^2$	39,068	29,494	20,975	14,556
	$t, \text{mm}$	6,43	5,55	5,64	3,83
C2	$A, \text{m}^2$	37,730	30,572	18,264	19,982
	$t, \text{mm}$	6,20	5,76	4,87	5,36

Papildomos plastinių daugiklių suvaržymų sąlygos (3.5) neleidžia formuotis plastinėms deformacijoms gniuždomuosiuose liaunuose strypuose. Todėl tokio- mis sąlygomis papildytas optimizavimo uždavinys atveda prie visai kitokio konstrukcijos įtempių ir deformacijų būvio nei klasikine suirtimi pagrįstas užda- vinys. Antruoju atveju C2 gaunamas didesnis santvaros tūris ir kitoks skerspjū- vio plotų pasiskirstymas. Apatinės juostos ir statramsčių skerspjūviai rasti ma- žesni, o viršutinės juostos ir spyrių didesni antruoju optimizavimo uždavinio atveju. Formaliai stiprumo ir standumo (poslinkių ribojimo) sąlygos tenkinamos abiem atvejais, tačiau antruoju atveju projektuojama klupumui atspari ir saugi konstrukcija, kurioje plastines deformacijas patiria tik viršutinės juostos tem- piamas elementas (3.5 pav.). Taigi pasiūlytasis optimizavimo modelis (3.1)– (3.7) užtikrina Eurokodo saugos ir tinkamumo ribinius būvius, kartu parinkda- mas paties mažiausio tūrio santvarą veikiant bet kokiai KKA.

### 3.2. Santvaros optimizavimas tiesioginiu tikimybinio metodu

Šiame skyriuje nagrinėjamas santvaros elementų tiesioginis tikimybinis skaičiavimas (tikrinimas, projektavimas). Tariaama, kad visi atsparumą ir poveikių efektą lemiantys dydžiai  $X$  yra atsitiktiniai ir jų pasiskirstymas aprašomas normaliuoju tikimybės tankio dėsnio, t. y.:  $X \in N(\mu_X, \sigma_X^2)$ . Dydis  $X$  visiškai apibrėžiamas dviem rodikliais – aritmetiniu vidurkiu  $\mu_X$  ir kvadratinu nuokrypiu  $\sigma_X$ :

$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2}.$$

Darbe neatsižvelgiama į galimą elementų stabilumo netekimą, todėl skaičiavimams skerspjūvio forma įtakos neturi. Taigi santvaros  $k$ -ojo elemento atsparumo funkcija yra

$$R_k = r(f_{yk}, A_{pk}, \Delta R), \quad (3.8)$$

o elementą veikiančio poveikių efekto funkcija –

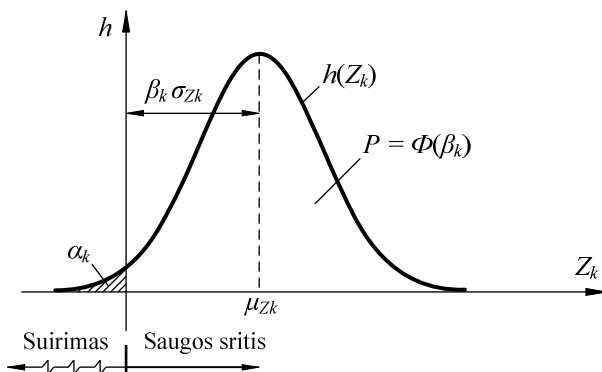
$$E_k = e(N_{ek}, N_{rk}, \Delta E). \quad (3.9)$$

Tuomet elemento atsparumo atsargos funkcija:

$$\begin{aligned} Z_k = R_k - E_k &= r(f_{yk}, A_{pk}, \Delta R) - e(N_{ek}, N_{rk}, \Delta E) = \\ &= z(f_{yk}, A_{pk}, N_{ek}, N_{rk}, \Delta R, \Delta E) = \\ &= N_{0k} - N_{ek} - N_{rk} + \Delta R + \Delta E = \\ &= A_{pk} \cdot f_{yk} - \alpha_k F - N_{rk} + \Delta R + \Delta E, \end{aligned} \quad (3.10)$$

čia  $\Delta R$  – atsparumo skaičiavimo, o  $\Delta E$  – efekto skaičiavimo modelių paklaidos.

Atsparumo ir poveikių efekto funkcijų kintamieji yra atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, todėl ir atsparumo atsargos funkcija (3.10) pasiskirsto taip pat, t. y.  $Z_k \in N(\mu_{Zk}, \sigma_{Zk}^2)$ . Atsparumo atsargos funkcijos patikimumo indeksas  $\beta_k$  ir yra pagrindinis tiesioginio tikimybinio projektavimo kriterijus. Grafinis tikimybės tankio funkcijos  $h(Z_k)$  vaizdas pateikiamas 3.6 paveiksle.



**3.6 pav.** Atsparumo atsargos  $Z_k$  tikimybės tankio  $h(Z_k)$  funkcijos grafikas

**Fig. 3.6.** The probability density function of the safety margin  $Z_k$

Eurocode siekiama užtikrinti, kad elementų patikimumo indeksas neviršytų norminio patikimumo indekso  $\beta_{nk}$ . Tokiu būdu užtikrinama reikiamai maža elemento suirimo tikimybė  $\alpha_k$  (3.6 pav.).

Elemento  $k$  patikimumo indeksas  $\beta_k$  nustatomas iš lygties

$$\beta_k = \frac{\mu_{Zk}}{\sigma_{Zk}}, \quad (3.11)$$

čia  $\mu_{Zk}$  yra stiprumo atsargos reikšmė vidurkio taškuose:

$$\mu_{Zk} = z(\mu_X) = \mu_{Apk} \cdot \mu_{fyk} - \mu_{Nek} - \mu_{Nr k} + \mu_{\Delta R} + \mu_{\Delta E}, \quad (3.12)$$

$\sigma_{Zk}$  – elemento atsparumo atsargos funkcijos kvadratinis nuokrypis:

$$\begin{aligned} \sigma_{Zk} = & \left[ \left( \frac{\partial z(\mu_X)}{\partial f_{yk}} \sigma_{fyk} \right)^2 + \left( \frac{\partial z(\mu_X)}{\partial A_k} \sigma_{Apk} \right)^2 + \right. \\ & \left( \frac{\partial z(\mu_X)}{\partial N_{ek}} \sigma_{Nek} \right)^2 + \left( \frac{\partial z(\mu_X)}{\partial N_{rk}} \sigma_{Nr k} \right)^2 + \left( \frac{\partial z(\mu_X)}{\partial \Delta R} \sigma_{\Delta R} \right)^2 + \\ & \left. \left( \frac{\partial z(\mu_X)}{\partial \Delta E} \sigma_{\Delta E} \right)^2 + 2\sigma_{RE} \sigma_{\Delta E}^2 \sigma_{\Delta R}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Atlikus diferencijavimo veiksmus gaunama:

$$\sigma_{Zk} = \left[ \left( A_{pk} \cdot \sigma_{f_{yk}} \right)^2 + \left( f_{yk} \cdot \sigma_{A_{pk}} \right)^2 + \left( \sigma_{N_{ek}} \right)^2 + \left( \sigma_{N_{rk}} \right)^2 + \left( \sigma_{\Delta R} \right)^2 + \left( \sigma_{\Delta E} \right)^2 + 2\sigma_{RE}\sigma_{\Delta E}\sigma_{\Delta R} \right]^{1/2}, \quad (3.14)$$

čia  $\sigma_{Xk}$  – elemento  $k$  atsitiktinio dydžio  $X$  kvadratinė nuokrypa;  $\sigma_{\Delta R}$ ,  $\sigma_{\Delta E}$ ,  $\sigma_{RE}$  – atsparumo ir efekto funkcijų skaičiavimo modelių bei jų koreliacijos lemiamos kvadratinės nuokrypos (Ditlevsen, Madsen 2007; Kala, Kala 2003). Laikoma, kad ribinė ašinė jėga  $N_{0k} = A_{pk}f_{yk}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) visu elemento ilgiu yra pastovi,  $f_{yk}$  yra elemento medžiagos takumo įtempis, tada analogiškai randama ašinės jėgos  $N_{ek} = f(A_p, E, I, F)$  funkcijos kvadratinė nuokrypa:

$$\sigma_{N_{ek}} = \left[ \left( \frac{\partial N_{ek}}{\partial A_p} \sigma_{A_{pk}} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_{ek}}{\partial E} \sigma_E \right)^2 + \left( \frac{\partial N_{ek}}{\partial I} \sigma_I \right)^2 + \left( \frac{\partial N_{ek}}{\partial F} \sigma_F \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

Tokių dalinių diferencialų paieška visos konstrukcijos atžvilgiu dažnai yra sudėtinga, todėl taikomi supaprastinti skaitinio diferencijavimo metodai, pavyzdžiui Ričardsono ekstrapoliacija (Jankovski, Atkočiūnas 2008).

**Santvaros tūrio minimizavimo uždavinys.** Optimizavimui naudojant matematinį programavimą, kintamosios kartotinės apkrovos veikiamos santvaros minimalaus tūrio radimo uždavinys, tiesiogiai ribojant elementų patikimumą, užrašomas taip:

$$\min L^T A_p, \quad (3.16)$$

kai

$$A N_r = 0, \quad (3.17)$$

$$|\beta| \geq \beta_n, \quad (3.18)$$

$$A_p \geq A_{\min}. \quad (3.19)$$

Tai tiesinio matematinio programavimo uždavinys, kurio tikslo funkcija (3.16) išreiškia santvaros elementų tūrį:  $L^T$  – santvaros strypų ilgių vektorius,



$A_p = (A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{pn})^T$  – atitinkamų strypų skerspjūvio plotų vektorius. Sąlygos (3.17) aprašo liekamųjų ašinių jėgų  $N_r$  pusiausvyrą prisitaikiusioje konstrukcijoje. Sąlyga (3.18) užtikrina nemažesnę nei normuotasis konstrukcijos elementų patikimumą,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots, \beta_n)^T$  – santvaros strypų patikimumų indeksų vektorius,  $\beta_n$  – normuotųjų patikimumo indeksų vektorius. Sąlygos (3.19) yra konstrukciniai apribojimai,  $A_{\min}$  – minimalių strypų skerspjūvio plotų vektorius. Nežinomieji (3.16)–(3.19) modelyje yra strypų skerspjūvio plotai  $A_p$  ir liekamosios įrašos  $N_r$ .

Sąlygose (17) vektoriaus  $\beta$  komponentai rašomi modulių siekiant užtikrinti atsparumo atsargos funkcijos galiojimą teigiamoms ir neigiamoms veikiančioms ašinėms jėgoms, t. y. tempimui ir gniuždymui. Atskleidus  $k$ -tajam santvaros elementui galima parašyti:

$$|\beta_k| = \frac{|\mu_{Zk}|}{\sigma_{Zk}} = \frac{\mu_{Apk} \cdot \mu_{fyk} + \mu_{Nek, \max} + \mu_{Nr k} + \mu_{\Delta R} + \mu_{\Delta E}}{\sigma_{Zk}}, \quad (3.20)$$

$$\mu_{Apk} \cdot \mu_{fyk} - \mu_{Nek, \min} - \mu_{Nr k} + \mu_{\Delta R} + \mu_{\Delta E}$$

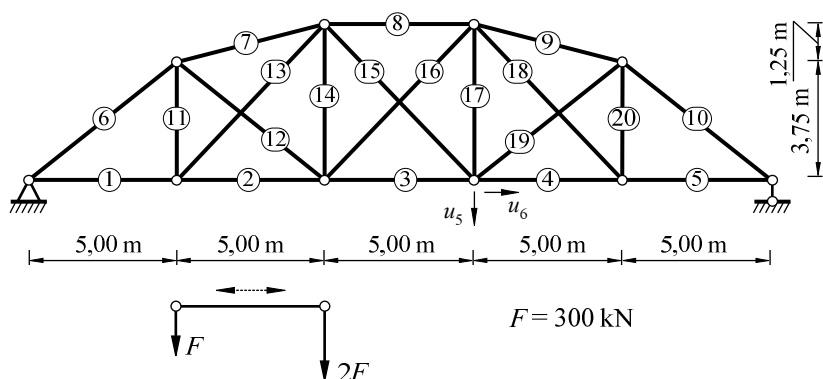
$$\sigma_{Zk}$$

čia  $\mu_{Nek, \max}$  ir  $\mu_{Nek, \min}$  – ekstreminės  $k$ -tojo elemento pseudotampriosios ašinės jėgos. Kintamąją kartotinę apkrovą nusakanti laiko funkcija  $F(t)$  pakeičiama jėgų kitimo srities viršūnes aprašančiomis jėgų kombinacijomis  $F_j$  (Atkočiūnas and Karkauskas, 2010). Tuomet  $\mu_{Nek, \max}$  ir  $\mu_{Nek, \min}$  gaunamos atrinkus ekstremines (didžiausias ir mažiausias) reikšmes iš visų apkrovos kombinacijų  $F_j$  sukeltų įrašų variantų ( $j = 1, 2, \dots, p, p = 2^m$ ) elemente  $k$  (Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2005).

### Skaitinis eksperimentas

Nagrinėjama tilto tipo santvara, veikiama dviejų jėgų poros, galinčios užimti bet kurią iš penkių nurodytų padėčių – tokiu būdu aprašoma judanti apkrova (3.7 pav.). Pagal (3.16)–(3.19) matematinį modelį reikia rasti minimalų santvaros tūrį, užtikrinant normuotąjį atsparumo atsargos patikimumo indeksą  $\beta_n = 3,8$  visiems elementams.

Sprendžiant šį uždavinį daromos tokios prielaidos: elementų ilgiai laikomi neatsitiktiniais dydžiais (konstantomis); tampriųjų įrašų tikimybės skirstiniai įvertinami tiesiogiai, neišskiriant skerspjūvio ploto  $A_p$ , tamprumo modulio  $E$  ir išorinių jėgų  $F$ , kaip atskirų atsitiktinių dydžių įtakos; tariama, kad atsparumo ir efekto funkcijos yra nepriklausomos, t. y.  $\sigma_{RE} = 0$ ; nepaisoma efekto funkcijos apskaičiavimo modelio paklaidos, t. y.  $\sigma_{\Delta E} = 0$ . Kintamosios kartotinės apkrovos poveikis įvertinimas per tampriųjų ekstreminių įrašų vektorius ir pritaikomas atitinkamai patikimumo indekso apribojimų funkcijai pagal (19) formulę.



3.7 pav. Santvara veikiamą judamos apkrovos

Fig. 3.7. Truss subjected to moving load

Iš anksto žinomi konstrukcijos ir medžiagų tikimybiniai parametrai: plieno takumo įtempio  $(\mu_{fy}, \sigma_{fy}) = (530 \text{ MPa}, 58,3 \text{ MPa})$ ; skerspjūvio ploto  $v_{Ap} = 0,05$ ; tampriųjų ašinių jėgų  $\sigma_{Ne} = 40 \text{ kN}$ ; atsparumo atsargos skaičiavimo modelio paklaidos  $(\mu_{AR}, \sigma_{AR}) = (21 \text{ kN}, 6 \text{ kN})$ . Mažiausias visų elementų skerspjūvio plotas priimamas  $A_{\min} = 5 \text{ cm}^2$ .

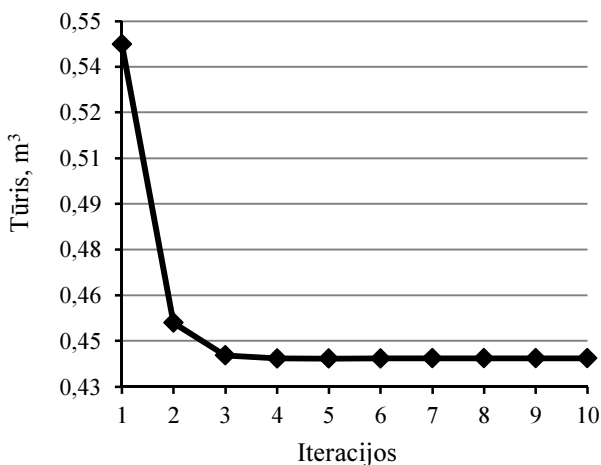
Uždaviniui spręsti naudojamas tolydinis optimizavimas, kai nepaisoma diskrečių profiliuočių sortimentų, t. y. skerspjūvio plotai parenkami matematiškai idealūs (tenkina uždavinio (3.16)–(3.19) apribojimus be atsargos). Konkretūs statybiniai profiliuočiai gali būti parenkami gavus galutinį tolydinio optimizavimo sprendinį. Elementai taip pat gali būti sugrupuoti prieš optimizuojant (parenkant vienodus skerspjūvius visiems santvaros juostų, tinklelio elementams ir pan.), tačiau dėl vaizdumo šiame pavyzdyje visi elementai yra nepriklausomi. Strypų unifikavimą racionaliau atlikti turint projektavimo rezultatus ir matant įrąžų pasiskirstymą.

Optimizavimo uždavinio (3.16)–(3.19) apribojimai priklauso nuo ieškomų dydžių (elementų skerspjūvio plotų) todėl optimizuojama iteraciniu būdu tokia seka:

- 1) nustatomi pradiniai skerspjūvio plotai  $A_{pk, prad}$ ,  $k \in K$  visiems santvaros elementams;
- 2) su nustatytais plotais sudaroma konstrukcijos standumo matrica  $K$  ir apskaičiuojamos pseudotampriųjų įrąžų vidurkių reikšmės  $\mu_{Nek, max}$ ,  $\mu_{Nek, min}$  bei atsparumo atsargos skirstinio nuokrypos  $\sigma_{Zk}$  visiems elementams  $k \in K$ ;

- 3) sprendžiamas tiesinio matematinio programavimo uždavinys (3.16)–(3.19), gaunami nauji skerspjūvio plotai  $A_{pk,nauj}$ ;
- 4) gautieji skerspjūvio plotai priskiriami pradiniais:  $A_{pk,prad} = A_{pk,nauj}$  ir uždavinio (3.16)–(3.19) sprendimo ciklas kartojamas, kol santvaros tūrio pokytis tarp gretimų iteracijų tampa norimai mažas.

Nagrinėjamam uždaviniui toks iteracinis skaičiavimas visiškai tinkamas, nes tiesinio uždavinio formuluotė yra paprastesnė (lyginant su netiesine formuluote, naudojant kintamųjų funkcines priklausomybes apribojimuose) ir konvergencija pasiekama jau po 6–10 iteracijų (3.8 pav.).



**3.8 pav.** Iteracinio uždavinio sprendinio konvergavimas

**Fig. 3.8.** Convergence of the iterative problem solution

Gauti skaičiavimo rezultatai pateikiami 3.3 lentelėje. Optimalų sprendinį sudaro elementų skerspjūvio plotai  $A^*$  ir liekamosios ašinės jėgos  $N_r^*$ . Taip pat suskaičiuojamos kiekviename elemente  $k$  atsirandančios ekstreminės ašinės jėgos:  $N_{max,k} = \mu_{Nek,max} + N_{rk}$  ir  $N_{min,k} = \mu_{Nek,min} + N_{rk}$ . Šios jėgos konstrukcijoje vienu metu neegzistuoja, tačiau atsiranda elementuose skirtingiems prisitaikomumo proceso etapams. Optimalus santvaros strypų skerspjūvio plotų pasiskirstymas sąlygiškai vaizduojamas 3.9 paveiksle. Pagal aptartas sąlygas atlikus skaičiavimus gautas optimalus santvaros tūris yra:  $V_{opt} = 0,43926 \text{ m}^3$ .

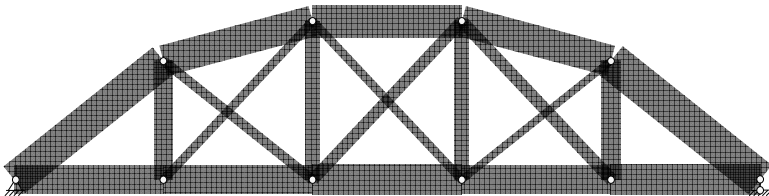
Toliau analizuojama atskirų tikimybinių dydžių įtaka skaičiavimo rezultatams. Išraiškos (3.14) pošaknyje esantys sandaugų kvadratai reiškia dėl skirtingų parametrų įvertinimo atsirandančias atsparumo atsargos skaičiavimo paklaidas.

Irašius nagrinėjamo pavyzdžio skaitines reikšmes pasirinktam (tebūnie aštuntajam) santvaros elementui gaunama:

$$\begin{aligned}\sigma_{Z8} &= \left[ (A_{p8} \cdot \sigma_{fy8})^2 + (f_{y8} \cdot \sigma_{Ap8})^2 + (\sigma_{Ne8})^2 + (\sigma_{Nr8})^2 + (\sigma_{\Delta R})^2 + \right]^{1/2} = \\ &= \left[ (0,006 \cdot 58300)^2 + (530000 \cdot 0,05 \cdot 0,006)^2 + 40^2 + 6^2 \right]^{1/2} = \\ &= \left[ 12,24 \cdot 10^4 + 2,53 \cdot 10^4 + 0,16 \cdot 10^4 + 36 \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Iš skaitinių rezultatų matyti, kad didžiausią įtaką patikimumo koeficiento reikšmei turi pirmasis aukščiau užrašytos funkcijos dėmuo, t. y. skerspjūvio ploto ir takumo įtempio nuokrypos sandaugos kvadratas. Skerspjūvio plotas yra optimizavimo parametras (nežinomas), taigi tai reiškia, kad siekiant didinti konstrukcijos patikimumą, efektyviausia yra mažinti plieno takumo įtempių kvadratinę nuokrypą. Šio dydžio reikšmę labiausiai lemia plieno profiliuotųjų gamybos technologijos ir gamybos kokybės kontrolė. Tačiau svarbu pažymėti, kad minėta konkretaus plieno gamintojo produkcijos nuokrypa gali būti mažesnė nei nustatyta tarptautiniuose standartuose, kuriuose priimamos nepalankiausios galimos reikšmės. Taigi, žinant tikrąsias medžiagų, iš kurių bus gaminama konstrukcija, charakteristikas, atsiranda galimybė projektuoti ekonomiškiau.

Toliau nagrinėjant suformuluotą optimizavimo uždavinį (3.16)–(3.19), tiriama normuotojo patikimumo indekso, nustatomo visiems elementams, ir santvaros optimalaus tūrio priklausomybė. Išsprendus aibę uždavinių gauta, kad, didinant normuotąjį elementų patikimumo indeksą  $\beta_n$  (kiti parametrai nekeičiami), gaunamas vis didesnis santvaros tūris. Sudarytas santvaros optimalaus tūrio priklausomybės nuo patikimumo indekso grafikas pateiktas 3.10 paveiksle. Jame nurodytas ir aprašyto uždavinio sprendinys, kai visiems elementams nustatytas  $\beta_n = 3,8$ . Gauta netiesinė priklausomybė (punktyrine linija vaizduojama tiesė, jungianti kraštines reikšmes).



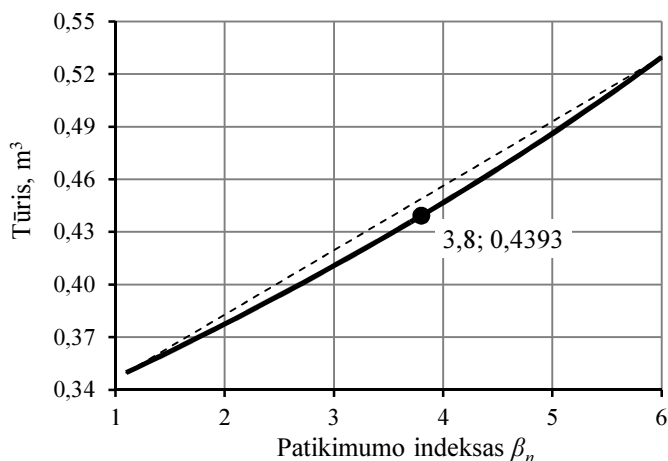
**3.9 pav.** Optimalios santvaros elementų skerspjūvio plotų santykinė schema (pagal 3.3 lentelę)

**Fig. 3.9.** Comparative scheme of optimal truss elements cross-sections (according to Table 3.3)

**3.3 lentelė.** Tikimybinio santvaros optimizavimo uždavinio rezultatai  
**Table 3.3.** Results of the probability-based truss optimization problem

Elemento. Nr.	$A^*$ , cm <sup>2</sup>	$N_r^*$ , kN	$N_{max}$ , kN	$N_{min}$ , kN	$\beta_n$
1	52,61	0,00	800,00	0,00	3,80
2	53,73	27,98	818,99	27,98	3,80
3	56,79	19,28	870,92	19,28	3,80
4	52,23	17,21	793,62	17,21	3,80
5	57,33	0,00	880,00	0,00	3,80
6	64,46	0,00	0,00	-1000,00	3,80
7	59,00	28,85	28,85	-908,13	3,80
8	60,24	19,28	19,28	-929,09	3,80
9	58,55	17,74	17,74	-900,52	3,80
10	70,43	0,00	0,00	-1100,00	3,80
11	34,21	27,98	482,82	27,98	3,80
12	18,64	-34,98	203,53	-203,53	3,80
13	16,59	-39,58	165,71	-165,71	3,80
14	26,90	40,27	353,37	40,27	3,80
15	16,36	-27,27	161,41	-161,41	3,80
16	21,88	-27,27	262,86	-178,01	3,80
17	25,91	32,19	335,70	22,20	3,80
18	23,49	-21,51	292,03	-117,74	3,80
19	14,26	-24,33	122,16	-122,16	3,80
20	35,96	17,21	513,62	17,21	3,80

Siūloma skaičiavimo metodika sudaro galimybę veiksmingai ir ekonomiškai projektuoti konstrukcijas tiesiogiai įvertinant jų patikimumą. Patikimumo riba skaičiuojama taikant sąlygiškai nesudėtingus matematinius metodus ir tiesinį optimizavimo algoritmą, kurį galima realizuoti bet kokioje matematinėje programinėje terpėje. Kaip ir visi disertacijoje aptarti skaičiavimo metodai, tikimybiniis skaičiavimas grindžiamas diskretiniu konstrukcijos modeliu ir matematiniu programavimu. Skaitinis optimizavimo pavyzdys rodo netiesinę priklausomybę tarp santvaros tūrio ir jos elementų patikimumo. Šis faktas rodo būtinybę kiekvienu atveju taikyti optimizaciją ir neleidžia tiesiogiai prognozuoti konstrukcijos patikimumo pagal jos geometrinius parametrus. Pavyzdys taip pat parodė, kad didžiausią įtaką konstrukcijos tūriui turi plieno takumo įtempio variacija, todėl būtent šio dydžio sumažinimas yra veiksmingiausias būdas siekti dar ekonomiškesnio konstrukcijos projekto.



**3.10 pav.** Santvaros tūrio ir patikimumo indekso priklausomybė

**Fig. 3.10.** Truss volume dependence on the reliability index  $\beta_n$

Šiame poskyryje aprašytas analizės metodas gali būti pritaikytas kaip kontrolės priemonė, kuriant naujas skaičiavimo ir optimizacijos metodikas. Tikimybėmis ir matematinio programavimo metodais pagrįstas skaičiavimas ir priauginė (inkrementinė) analizė leidžia visapusiškai įvertinti konstrukcijos elgseną ir projekto tinkamumą eksploatacijai.

### 3.3. Prisitaikančios konstrukcijos optimizavimas inkrementiniu-iteratyviniu metodu

Kaip buvo aptarta pirmajame disertacijos skyriuje, KKA atveju vystantis plastišioms deformacijoms, konstrukcijų poslinkiai gali kisti nemonotoniškai. Siekiant išvengti avarinių ar eksploatacinių reikalavimų neatitinkančių situacijų, susietų su pernelyg dideliais konstrukcijų poslinkiais, tenka nagrinėti apkrovimo istoriją. Šiame poskyryje aprašomas autoriaus pasiūlytas inkrementinis prisitaikančių konstrukcijų deformacijų ir įlinkių analizės metodas, leidžiantis fiksuoti poslinkių kitimo nemonotoniškumą (Blaževičius, Atkočiūnas 2011).

Siūlomoje metodikoje pagrindinis optimizavimo uždavinys atskirtas nuo poslinkių nagrinėjimo analizės uždavinio, todėl metodika tinkama bet kokios konstrukcijos (santvaros, rėmo, plokštės) optimizacijai. Išsprendus optimizavimo uždavinį, įjungiamas inkrementinis prisitaikančių konstrukcijų deformacijų ir įlinkių analizės uždavinys, sudarantis galimybes fiksuoti poslinkių kitimo nemonotoniškumą. Sprendimo algoritmas vaizduojamas 3.11 paveiksle, jo realizavimo žingsniai aptariami nuodugniau.

Pradiniai duomenys sudaro informaciją apie konstrukciją, kuri optimizavimo procese nekinta – geometriniai, fiziniai parametrai ir kita.

Pagrindiniu optimizavimo uždaviniu ieškomi pagrindiniai viso algoritmo nežinomieji. Uždavinio formuluotė skiriasi priklausomai nuo optimizavimo kriterijaus. Šiuo atveju kaip pagrindinis optimizavimo uždavinys bus taikomas santvaros tūrio optimizavimas judamosios apkrovos atveju su prisitaikomumo, stabilumo ir standumo sąlygomis ((3.1)–(3.7) matematinis modelis, 3.1 poskyryje).

Pagrindinį uždavinio sprendinį sudaro optimumą atitinkančios kintamųjų reikšmės. Uždavinio sprendinys turi būti grindžiamas standumo apribojimais (poslinkių ribojimo sąlygos turi būti tenkinamos kaip lygybės). Jei taip nėra, poslinkių ribos yra per plačios ir tokia optimizavimo uždavinio formuluotė netenka prasmės.

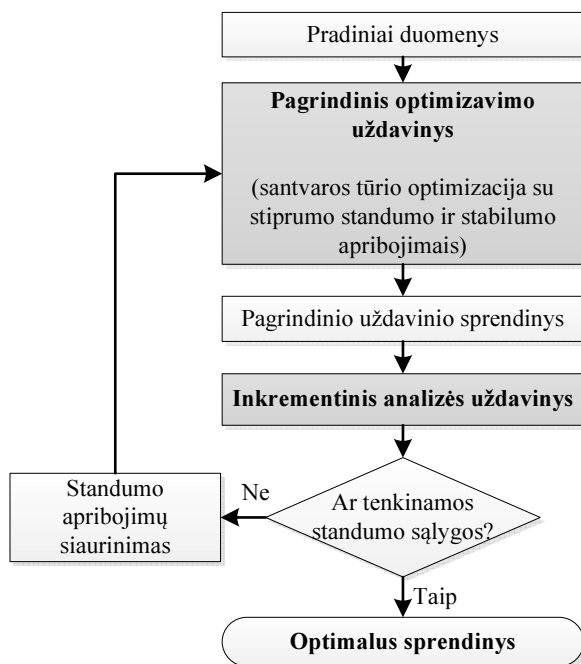
Inkrementiniu analizės uždaviniu, kuriuo nagrinėjama žinoma (pasirinkta) konkreti konstrukcijos apkrovimo istorija. Tokiu būdu analizuojamas etapinis (inkrementinis) konstrukcijos prisitaikomumo būvio ir liekamųjų poslinkių kitimas.

Standumo sąlygų tikrinimas, atlikus konstrukcijos inkrementinę analizę, kurios metu gaunamos liekamųjų (arba suminių) poslinkių reikšmės kiekvienoje apkrovimo istorijos fazėje. Visos šios reikšmės turi būti palygintos su projektinėmis (nustatytomis pirmu žingsniu ir nekintamomis visame optimizavimo procese) ir taip patikrinta ar visoje apkrovimo istorijoje standumo sąlygos nebuvo pažeistos. Jei inkrementinė analizė nerodo minėtų sąlygų pažeidimo – pagrindinio optimizavimo uždavinio sprendinys yra optimalus ir uždavinys baigiamas.

Standumo apribojimų siaurinimas atliekamas jeigu inkrementinės analizės metu buvo nustatyta, kad apkrovimo istorijoje standumo apribojimai buvo pažeisti. Tokiu atveju iš naujo formuluojamos liekamųjų poslinkių ribos pagrindiniam optimizavimo uždaviniui.

Optimalus prisitaikančios konstrukcijos projektavimo uždavinio sprendinys gaunamas tuomet, kai tenkinamos visos pagrindinio optimizavimo uždavinio apribojimų sąlygos (prisitaikomumo, matematinio griežtumo, standumo, stabilumo, plastinių daugiklių neneigiamumo) ir įsitikinama, kad poslinkių ribos nebuvo pažeistos prisitaikomumo procese, vertinant konkrečią apkrovimo istoriją.

Inkrementinė analizė pagrįsta iteraciniu analizės uždavinio skaičiavimu, pamažu didinant veikiančią apkrovą arba jos padėtį (judamosios apkrovos atveju). Tikslas – rasti tampriosios plastinės konstrukcijos poslinkius laipsniško apkrovos kitimo metu. Inkrementinė analizė parodo visą deformavimosi proceso istoriją (diskrečiomis reikšmėmis) ir taip leidžia sekti poslinkių reikšmių kitimą, t. y. konstrukcijos atitiktį tinkamumo ribinio būvio reikalavimams.



**3.11 pav.** Inkrementinio-iteratyvinio optimizavimo uždavinio schema

**Fig. 3.11.** Scheme of the incremental-iterative optimization problem

Uždavinys formuluojamas taip:

*reikia inkrementiškai išanalizuoti konkrečią žinomą konstrukcijos apkrovimo istoriją ir užtikrinti, kad po jos realizavimo, veikiant bet kokiai apkrovų kombinacijai iš apibrėžtos (žinomos) srities, nebus pažeistos prisitaikomumo sąlygos.* Tokio uždavinio matematinis modelis užrašomas taip:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \Delta \mathbf{N}_{rv}^T \mathbf{D} \Delta \mathbf{N}_{rv} + \mathbf{N}_{\Sigma r}^T \mathbf{D} \Delta \mathbf{N}_{rv} \right\}, \quad (3.21)$$

visiems  $v = 1, 2, \dots, z, z \in Z$ ,

kai

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{N}_{rv} = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$



$$\begin{aligned}
N_{\Sigma r} + \Delta N_{rv} + N_{e1} &\leq N_0, \\
-N_{\Sigma r} - \Delta N_{rv} - N_{e1} &\leq \chi N_0, \\
N_{\Sigma r} + \Delta N_{rv} + N_{e2} &\leq N_0, \\
-N_{\Sigma r} - \Delta N_{rv} - N_{e2} &\leq \chi N_0, \\
&\dots \\
N_{\Sigma r} + \Delta N_{rv} + N_{ev} &\leq N_0, \\
-N_{\Sigma r} - \Delta N_{rv} - N_{ev} &\leq \chi N_0,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

čia:

$$N_{\Sigma r} = \sum_{v=1} \Delta N_{rv}. \tag{3.24}$$

Uždavinio (3.21)–(3.24) apribojimų skaičius keičiasi kiekvienoje iteracijoje. Nagrinėjant  $v$ -ąją apkrovos inkrementą (konkretų apkrovimo istorijos žingsnį) sąlygos (3.23) papildomos jį ribojančiais prisitaikomumo apribojimais, paliekant ir visus iki tol buvusius. Paskutinėje apkrovimo istorijos fazėje (kai  $v = z$ ) turėsime  $z$  apribojimų kiekvienam konstrukcijos pjūviui, kiekvienai apkrovų hodo grafo viršūnei. Sprendžiant uždavinio dualias formuluotes (čia nepateikiama), gaunami plastiniai daugikliai  $\lambda_v$ . Tuomet kiekvienoje iteracijoje suskaičiuojame liekamuosius poslinkius  $\mathbf{u}_{rv} = \mathbf{H}\lambda_v$ .

### Skaitinis eksperimentas

Nagrinėjama santvara apkrauta judančia apkrova, kaip parodyta 3.7 paveiksle. (3.2 skyriuje). Ribojami santvaros trečiojo mazgo (antrojo ir trečiojo elementų bendro mazgo) liekamieji poslinkiai. Horizontalus  $\bar{\mathbf{u}}_{r5,\text{inf}} = -0,1 \cdot 10^{-3}$  m,  $\bar{\mathbf{u}}_{r5,\text{sup}} = 0,1 \cdot 10^{-3}$  m, ir vertikalus  $\bar{\mathbf{u}}_{r6,\text{inf}} = -0,6 \cdot 10^{-3}$  m,  $\bar{\mathbf{u}}_{r6,\text{sup}} = 0,6 \cdot 10^{-3}$  m. Santvaros strypams naudojami trys skirtingi skerspjuviai:  $A_1$  – apatinės juostos strypams,  $A_2$  – viršutinės juostos strypams ir  $A_3$  – tinklelio strypams. Skerspjuvių tipas – šaltai valcuoti apvalūs vamzdžiai. Reikia rasti minimalų santvaros strypų tūrį įvertinant konkrečią apkrovimo istoriją ir užtikrinant, kad jos metu nebus pažeisti poslinkių. Pirmiausia sprendžiamas pagrindinis optimizavimo uždavinys pagal (3.1)–(3.7) matematinį modelį. Optimalus sprendinys yra paskutinės iteracijos rezultatas (1 optimizavimo algoritmo ciklas): minimalus konstrukcijos tūris  $V = \mathbf{L}^T \mathbf{A}_p = 0,3255 \text{ m}^3$ ; strypų skerspjuvių plotai:  $A_1 = 37,4468 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 47,9459 \text{ cm}^2$ ,  $A_3 = 16,9088 \text{ cm}^2$ . Gavę pagrindinio uždavinio sprendinį

pereiname prie inkrementinės prisitaikomumo analizės. Tam naudojamas uždavinys (3.21)–(3.24). Iš čia gaunamos liekamųjų poslinkių reikšmės esant kiekvienai apkrovos diskreta judėjimo padėčiai (penki inkrementai). Jos pateikiamos 3.4 lentelėje. Ribojami poslinkiai paryškinti.

**3.4 lentelė.** Liekamųjų poslinkių reikšmės, mm (pirmasis ciklas)

**Table 3.4.** Values of residual displacements, mm (first cycle)

Nr.	Iteracijos numeris				
	1	2	3	4	5
	Judamos apkrovos padėtis (tariamasis prieaugis)				
	$\hat{F}_1$	$\hat{F}_2$	$\hat{F}_3$	$\hat{F}_4$	$\hat{F}_5$
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	1,443	1,443	1,443	1,608	1,608
3	–0,136	–0,136	–0,136	–0,136	–0,136
4	0,171	0,171	0,171	0,586	0,586
<b>5</b>	<b>–0,124</b>	<b>–0,124</b>	<b>–0,124</b>	–0,098	–0,098
<b>6</b>	0,195	0,195	0,195	0,558	0,558
7	–0,125	–0,125	–0,125	–0,391	–0,391
8	0,091	0,091	0,091	3,192	3,192
9	–0,125	–0,125	–0,125	–0,391	–0,391
10	–0,298	–0,298	–0,298	–0,142	–0,142
11	–0,397	–0,397	–0,397	–0,189	–0,189
12	–0,222	–0,222	–0,222	–0,029	–0,029
13	0,370	0,370	0,370	0,728	0,728
14	–0,213	–0,213	–0,213	0,001	0,001
15	0,170	0,170	0,170	0,962	0,962
16	–0,195	–0,195	–0,195	0,181	0,181
17	0,093	0,093	0,093	–0,763	–0,763

Iš 3.4 lentelės matoma, kad 5-ojo poslinkio ribos buvo pažeistos pirmuose apkrovimo istorijos etapuose. Tai reiškia, kad reikia siaurinti poslinkių ribas pagrindiniam optimizavimo uždaviniui ir kartoti visą optimizavimo algoritmą.

Poslinkio riba sumažinama 5%. Gaunama  $u_{r5,\text{inf}}^2 = 0,95 \cdot u_{r5,\text{inf}}^1 = -0,095 \cdot 10^{-3}$  m.

Kitos poslinkių ribos lieka tokios pačios. Kartojamas pagrindinis optimizavimo uždavinys (11)–(17), tuomet su gautais naujais skerspjūvio plotais vėl atliekama inkrementinė analizė. Taip tęsiama tol, kol apkrovimo istorijoje nebeatsiranda poslinkių ribų pažeidimų. Kaip parodė skaičiavimai, šiuo konkrečiu atveju reikia atlikti 6 skaičiavimų ciklus. Paskutinio ciklo pagrindinio optimizavimo uždavinio sprendinys yra toks (šeštasis ciklas): minimalus konstrukcijos tūris  $V = \mathbf{L}^T \mathbf{A}_p = 0,32657 \text{ m}^3$ ; strypų skerspjūvių plotai:  $A_1 = 37,4468 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 47,9459 \text{ cm}^2$ ,  $A_3 = 17,0932 \text{ cm}^2$ . Su gautais skerspjūvio plotais atliktos inkrementinės analizės liekamųjų poslinkių reikšmės kiekvienoje apkrovos diskreta judėjimo padėtyje pateikiamos 3.5 lentelėje.

**3.5 lentelė.** Liekamųjų poslinkių reikšmės, mm (šeštasis ciklas)

**Table 3.5.** Values of residual displacements, mm (sixth cycle)

Nr.	Iteracijos numeris				
	1	2	3	4	5
	Judamosios apkrovos padėtis (tariamasis prieaugis)				
	$\hat{F}_1$	$\hat{F}_2$	$\hat{F}_3$	$\hat{F}_4$	$\hat{F}_5$
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	1,140	1,140	1,140	1,288	1,288
3	-0,108	-0,108	-0,108	-0,108	-0,108
4	0,135	0,135	0,135	0,508	0,508
5	-0,099	-0,099	-0,099	-0,075	-0,075
6	0,154	0,154	0,154	0,481	0,481
7	-0,100	-0,100	-0,100	-0,341	-0,341
8	0,072	0,072	0,072	2,858	2,858
9	-0,100	-0,100	-0,100	-0,341	-0,341
10	-0,235	-0,235	-0,235	-0,095	-0,095
11	-0,314	-0,314	-0,314	-0,127	-0,127
12	-0,177	-0,177	-0,177	-0,003	-0,003
13	0,292	0,292	0,292	0,614	0,614
14	-0,169	-0,169	-0,169	0,023	0,023
15	0,134	0,134	0,134	0,845	0,845
16	-0,155	-0,155	-0,155	0,181	0,181
17	0,073	0,073	0,073	-0,696	-0,696

Gauti poslinkiai neviršija nustatytų ribų nė vienoje apkrovos istorijos fazėje. Tai reiškia, kad pagrindinio optimizavimo uždavinio sprendinys (6 ciklo) yra optimalus (nustatytu tikslumu). 3.6 lentelėje pateikiamas visų 6 optimizavimo algoritmo ciklų pagrindiniuose optimizavimo uždaviniuose (paskutinėse jų iteracijose) gautų skerspjūvio plotų ir tikslo funkcijų reikšmės.

**3.6 lentelė.** Optimizavimo algoritmo skaičiavimo ciklų rezultatai

**Table 3.6.** Results of the optimization algorithm calculations

Ciklo Nr.	$A_1, m^2$	$A_2, m^2$	$A_3, m^2$	$V, m^3$
	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^1$
1	37,4468	47,9459	16,9088	3,2550
2	37,4468	47,9459	16,9495	3,2573
3	37,4468	47,9459	16,9883	3,2596
4	37,4468	47,9459	17,0251	3,2617
5	37,4468	47,9459	17,0600	3,2638
6	<b>37,4468</b>	<b>47,9459</b>	<b>17,0932</b>	<b>3,2657</b>

Iš 4 lentelės matoma, kaip kiekvieno optimizavimo ciklo metu didėja tikslo funkcijos reikšmė (optimalus konstrukcijos tūris) ir santvaros tinklelio strypų skerspjūvio plotas ( $A_3$ ). Akivaizdu, kad tai lemia būtinas standumo sąlygų siaurinimas pagrindiniame optimizavimo uždavinyje.

### 3.5. Rėminių konstrukcijų optimizavimas pagal eurokodo reikalavimus

Šiame poskyryje (2.70)–(2.74) bendrasis diskretizuotos konstrukcijos optimizavimo modelis pritaikomas rėminėms konstrukcijoms. Nagrinėjamos plokščios rėminės konstrukcijos, kurių elementai veikiami lenkimo momento ir ašinės jėgos. Konstrukcijai taikomi eurokodo reikalavimai, taigi matematinis modelis formuluojamas atsižvelgiant į 2.5 poskyryje išdėstytus stiprumo, stabilumo ir standumo (poslinkių ribojimo) reikalavimus. Apibendrinta rėminės konstrukcijos įraša, nustatanti elemento laikomąją galią, naudojamas lenkimo momentas.

Prisitaikančios plieninės rėminės konstrukcijos optimalaus ribinių lenkimo momentų pasiskirstymo nustatymo uždavinys su eurokodo reikalavimais formuluojamas taip:

$$\min \sum_k L_k M_{0k}, \quad (3.25)$$

kai

$$\varphi_{j,st} = \Pi_{st} \mathbf{M}_0 - \Phi_{st} (\mathbf{G}\lambda + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

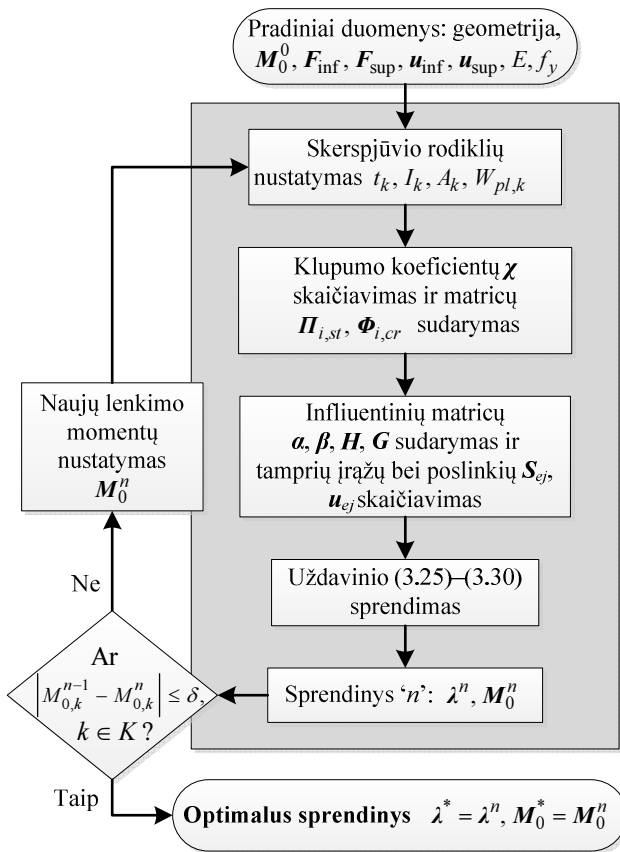
$$\varphi_{j,cr} = \Pi_{cr} \mathbf{M}_0 - \Phi_{cr} (\mathbf{G}\lambda + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

$$\lambda_{j,st}^T \varphi_{st} = 0, \quad \lambda_{j,st} \geq \mathbf{0}, \quad \lambda_{j,cr} = \mathbf{0} \quad (\lambda_{j,cr}^T \varphi_{cr} = 0), \quad \lambda = \sum_j (\lambda_{j,st} + \lambda_{j,cr}), \quad (3.28)$$

$$M_{0k} \geq M_{0k,\min}, \quad k \in K, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{u}_{\inf} \leq \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{\sup}, \quad \mathbf{u}_r = \mathbf{H}\lambda. \quad (3.30)$$

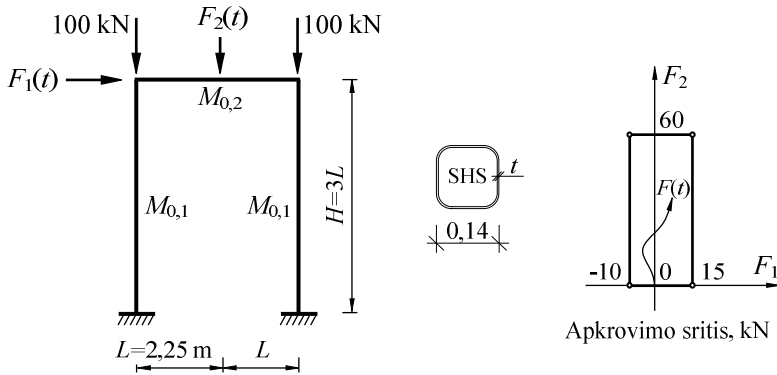
Kaip ir anksčiau aptartu santvaros optimizavimo uždaviniu, influentinės matricos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mathbf{G}$  ir  $\mathbf{H}$  priklauso nuo uždavinio nežinomųjų momentų  $\mathbf{M}_0$ , todėl uždavinys sprendžiamas iteraciniu būdu (3.12 pav.). (3.25)–(3.30) uždavinio nežinomieji yra ribiniai lenkimo momentai  $\mathbf{M}_0$  ir plastiniai daugikliai  $\lambda$ . Modelį sudaro (3.26), (3.27) stiprumo (prisitaikomumo) sąlygos, (3.28) matematinio programavimo griežtumo sąlygos kartu su nauja plastinių daugiklių ribojimo sąlyga  $\lambda_{j,cr} = \mathbf{0}$ , (3.29) konstrukciniai apribojimai ir (3.30) poslinkių ribojimai.



**3.12 pav.** Uždavinio sprendimo algoritmas  
**Fig. 3.12.** Flowchart of the proposed algorithm

### 1 skaitinis eksperimentas

Nagrinėjamas nesudėtingo portalinio rėmo (3.13 pav.) ribinių momentų  $M_0$  pasiskirstymo optimizavimo uždavinys. Rėmas veikiamas dviejų fiksuotų (ne-kintančių) ir dviejų kintamų nurodytoje srityje apkrovų  $F_1$  ir  $F_2$ . Skaičiuojamosioms apkrovų reikšmėms naudojamas  $\gamma_E = 1,3$  dalinis koeficientas. Rėmas sukonstruotas iš dviejų skirtingų kvadratinų tuščiavidurių skerspjūvių (SHS 140), aprašomų ribiniais momentais  $M_{0,1}$  ir  $M_{0,2}$ . Plieno tamprumo modulis  $E = 210$  GPa, takumo įtempis –  $f_y = 235$  MPa.



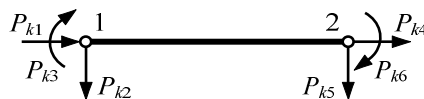
**3.13 pav.** Rėmo geometrija ir apkrovimo sritis

**Fig. 3.13.** Frame geometry and loading locus

Rėmo diskretizacijai naudojami pusiausvyrieji lenkiamieji ir tempiamieji-gniuždomieji baigtiniai elementai (3.14 pav.). Toliau pateikiamos elemento pirmojo laipsnio vidinių jėgų interpoliavimo funkcijos, elemento pasidavimo matrica  $\mathbf{D}_k$  ir elemento pusiausvyros lygtys (Kalanta *et al.* 2009).

$$M_k(x) = \sum_{j=1}^2 H_{kj}(x) M_{kj} = \left(1 - \frac{x}{l_k}\right) M_{k1} + \frac{x}{l_k} M_{k2}, \quad N_k(x) = N_k.$$

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_{k1} \\ P_{k2} \\ P_{k3} \\ P_{k4} \\ P_{k5} \\ P_{k6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/l_k & -1/l_k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/l_k & 1/l_k & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \\ N_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}_k \mathbf{S}_k, \quad \mathbf{D}_k = \frac{l_k}{6EI_k} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6I_k / A_k \end{bmatrix}.$$



**3.14 pav.** Plokščios rėminės konstrukcijos baigtinis elementas

**Fig. 3.14** Finite element of a plane frame

Siekiant pademonstruoti disertacijoje pateiktų patobulinimų įtaką optimizavimo uždaviniams, rėmas optimizuojamas pagal keturis skirtingus modelius. Visų modelių tikslo funkcija tokia pati – nustatyti optimalų ribinių momentų pasiskirstymą, kuris atitiktų kriterijų  $\min \sum_k L_k M_{0k}$  (čia  $L_k$  yra elementų ilgiai).

Visi uždaviniai turi momentų neneigiamumo sąlygas  $M_{0k} \geq 0$ ,  $k \in K$  (ki taip sakant, mažiausiasis leidžiamas skerspjūvis turi turėti neneigiamą ribinį lenkimo momentą). Keičiant kitas (3.25)–(3.30) uždavinio sąlygas, gaunami keturi skirtingi atvejai:

- A. Ciklinė plastiškoji suirtis.** Klasikinis ribinės pusiausvyros optimizavimo uždavinys su pusiausvyros ir stiprumo sąlygomis:

$$AS_r = 0,$$

$$\varphi_j = S_0 - f_j(S_r + S_{ej}(S_0)) \geq 0, \quad \forall j.$$

Stiprumo sąlygos šiame ir visuose kituose uždaviniuose formuluojamos pagal eurokodo reikalavimus (formulė (2.83) 2.5.2 skyriuje).

- B. Prisitaikomumas su poslinkių ribojimais.** Šis uždavinys performuluojamas tai, kad sprendinys pasiektų konstrukcijos prisitaikymą (ne plastiškąją suirtį). Uždavinio apribojimus sudaro (3.26) stiprumo sąlygos, atitinkamos (3.28) griežtumo sąlygos ir (3.30) poslinkių ribojimai. Ribojamas vertikalus rėmo poslinkis ir sijos vidurio įlinkis  $u_1 \leq 0,10$  m ir  $u_2 \leq 0,05$  m (3.15 pav.).

- C. Prisitaikomumas su poslinkių ir stabilumo ribojimais.** Šio uždavinio apribojimai tokie patys kaip B atvejo, tik papildomai užrašomos eurodoko stabilumo sąlygos. Taigi čia nagrinėjamas (3.25)–(3.30) modelis be papildomos plastinių daugiklių sąlygos  $\lambda_{j,cr} = 0$ .

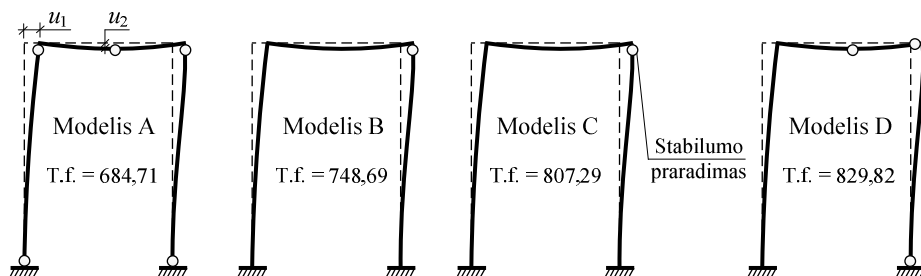
- D. Prisitaikomumas su poslinkių, stabilumo ribojimais ir papildoma plastinių daugiklių ribojimo sąlyga.** Šiuo atveju tai visas (3.25)–(3.30) matematinis modelis.

Visi uždaviniai yra išspręsti naudojant MATLAB matematinę programinę paketą. Rezultatų santrauka pateikiama 3.7 lentelėje. Rėmo modeliai su plastinių deformacijų atsiradimo vietomis, vaizduojami 3.15 paveiksle. Paveiksle parodyta, kad uždavinio C atveju, klupdymo plastinės deformacijos atsirado dešiniojoje kolonoje (tame pjūvyje buvo aktyvi (3.27) sąlyga), taigi toks rėmas turėtų sugriūti dėl stabilumo praradimo, nors atsiranda tik vienas plastinis lankstas. Ši problema pašalinama D uždavinio modelyje, kuriame įrašyta papildoma plastinių daugiklių sąlyga.

**3.7 lentelė.** Optimizavimo uždavinių sprendimo rezultatai**Table 3.7.** The calculated results for the optimization problems

Optimizavimo uždavinys	Tikslo funkcijos reikšmė, $\text{kN}\cdot\text{m}^2$	Ribinis lenkimo momentas $M_{01}$ , $\text{kN}\cdot\text{m}$	Ribinis lenkimo momentas $M_{02}$ , $\text{kN}\cdot\text{m}$	Storis $t_1$ , mm	Storis $t_2$ , mm
A	684,71	30,54	60,52	4,80	10,58
B	748,69	38,09	52,11	6,13	8,81
C	807,29	42,28	52,56	6,90	8,91
D	829,82	46,77	44,10	7,76	7,25

Iš skaičiavimo rezultatų akivaizdu, kad uždavinio tikslo funkcija didėja su kiekvienu paskesniu uždaviniu. Taip yra dėl to, kad su kiekvienu uždaviniu padidėja taikomų apribojimų sritis ir dėl to traukiasi leidžiamoji sprendinių sritis. Gautos plastinių lankstų atsiradimo vietos atrodo atsitiktinės, tačiau jos priklauso nuo kiekvieno uždavinio sąlygų ir nėra susietos su kitais uždaviniais. Vienas svarbiausių šio palyginimo rezultatų yra gauti elementų sienelių storiai (iš anksto pasirinkus skerspjūvio aukštį). Kolonos skerspjūvio sienelė ( $t_1$ ) padidėja įvedus poslinkių ribojimus ir dar labiau – pridėjus ir klupumo sąlygas. Galiausiai, pastutiniame D modelyje gaunama, kad sijos ir kolonos elementai turi būti beveik tokio paties storio, o tai stipriai skiriasi nuo A uždavinyje gauto ciklinės suirties sprendinio. Modelyje D taip pat randamas lankstas kolonoje, tačiau jis nulemtas (3.26) stiprumo sąlygos, o ne stabilumo, todėl nepažeidžia apribojimo  $\lambda_{j,cr} = 0$ . Reikia paminėti, kad atsiradęs lankstas gali padaryti įtaką kolonos klupdomajam atspariui (keisdamas skaičiuojamąjį ilgį) ir tai reikėtų įvertinti perskaičiuojant stabilumo sąlygas, tačiau šiame tyrime į tai nebuvo atsižvelgta.

**3.15 pav.** Optimalaus sprendinio plastinės deformacijos ir tikslo funkcijos reikmės (T.f.)**Fig. 3.15.** Plastic hinges at the optimal state and the values of the objective function



## 2 skaitinis eksperimentas

Nagrinėjamas trijų aukštų plokščias rėmas (3.16 pav.), veikiamas keturių fiksuotų ir dviejų kintamųjų apkrovų  $F_1$  ir  $F_2$ , galinčių nepriklausomai kisti nurodytoje srityje (matavimo vienetai kN). Skaičiuojamosioms apkrovų reikšmėms naudojamas  $\gamma_E = 1,3$  dalinis koeficientas. Reikia surasti optimalų ribinių lenkimo momentų pasiskirstymą ir atitinkamas elementų skerspjūvio charakteristikas pagal (3.25)–(3.30) modelį. Rėmo elementai suskirstyti į keturias grupes  $s_1$ – $s_4$ . Visi skerspjūviai yra kvadratiniai tuščiaviduriai (SHS). Plieno tamprumo modulis yra  $E = 210$  GPa, takumo įtempis –  $f_y = 235$  MPa. Minimalios galimos ribinių momentų reikšmės  $M_{0k,\min}$  visiems elementams parenkamos nulinės.

Palyginimui kaip veikia disertacijoje siūlomi optimizavimo patobulinimai, nagrinėjami du uždavinių modeliai: C ir D (nuodugniau aprašyti ankstesniame pavyzdyje). Modelis C neturi papildomų sąlygų plastiniams daugikliams (jame taikoma sąlyga  $\lambda_{j,cr} \geq 0$ ), o modelis D apima visą modelį (3.25)–(3.30) (jame taikoma sąlyga  $\lambda_{j,cr} = 0$ ). Skaičiavimų rezultatai pateikti 3.8 lentelėje. Plastinės rėmo deformacijos abiem optimizavimo atvejais parodytos 3.16 paveiksle. Gautos tokios uždavinių tikslo funkcijos: 9515,2 kN·m<sup>2</sup> taikant modelį C ir 10112,7 kN·m<sup>2</sup> taikant modelį D.

Papildomos plastinių daugiklių sąlygos ( $\lambda_{j,cr} = 0$ ) D uždavinyje neleido susidaryti plastiniams lankstams dėl klupumo sąlygų tenkinimo, kaip tai atsitiko uždavinyje C. Todėl gauti skirtingi liekamųjų įrąžų ir poslinkių pasiskirstymai konstrukcijoje.

### 3.8 lentelė. Minimizavimo uždavinių skaičiavimo rezultatai

**Table 3.8.** The calculated results for the minimization problems

Optimalus ribinis lenkimo momentas $M_0$ , kN·m				
Elem. Modelis	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
C	150,15	173,46	150,83	212,33
D	187,13	192,82	183,89	185,92
Optimalus skerspjūvio sienutės storis $t$ (mm), kai skerspjūvio kraštinė 250 mm				
C	7,31	8,55	7,35	10,70
D	9,30	9,61	9,12	9,23
Didžiausi suminiai poslinkiai $u_i = u_{ri} + u_{ej,i,\max}$ , m				
Riba Modelis	$u_1 \leq 0,40$	$u_2 \leq 0,030$	$u_3 \leq 0,030$	$u_4 \leq 0,030$
C	0,37	0,030	0,030	0,025
D	0,31	0,020	0,030	0,023



eksperimente). Kaip ir santvaros atveju, tokia atsarga leidžia korektiškiau įvertinti klupdomųjų elementų tampriąją plastinę elgseną.

3. Autoriaus išplėtotas inkrementinis-iteratyvinis prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinys leidžia sekti liekamųjų poslinkių kitimą prisitaikomumo procese. Skaitiniais rezultatais pademonstruota kaip, taikant tokią metodiką, sėkmingai nustatomi neleistini liekamųjų poslinkių ribų pažeidimai konstrukcijos prisitaikumomo procese.
4. Tiesioginio tikimybinio santvaros optimizavimo eksperimentas parodė, kaip, turint pakankamai duomenų apie atsitiktinių dydžių pasiskirstymą, galima projektuoti optimalias norimo patikimumo konstrukcijas.



---

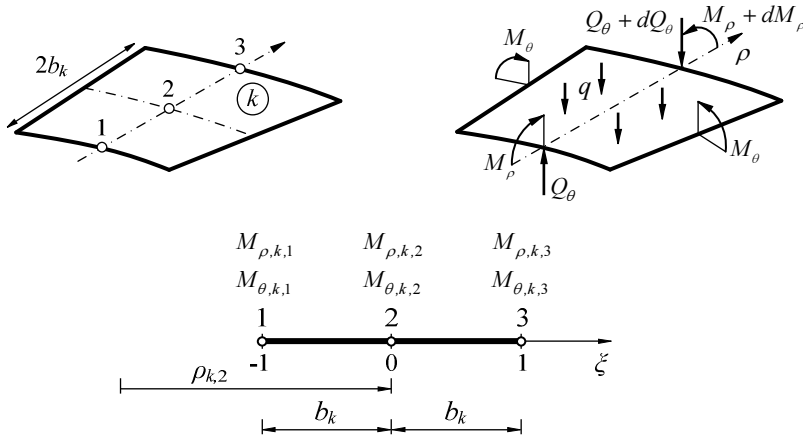
## Konstrukcijų optimizavimas naudojant netiesinį takumo kriterijų

Ketvirtajame skyriuje nagrinėjamos konstrukcijos, kurioms įprastai taikomas netiesinis takumo kriterijus – lenkiamosios plokštės. Lenkiamųjų plokščių pritaikomumas čia taip pat suprantamas, kaip būvis iki suirties, t. y. su ribotomis plastinėmis deformacijomis gautomis ribojant konstrukcijos poslinkius.

Skyrius padalytas į tris pagrindines dalis. Pirmojoje pateikiama apvalių ir žiedinių simetrinių plokščių diskretizacija ir taikomų elementų charakteristikos. Įtempių ir deformacijų būvis aprašomas lokalsiosiose polinėse koordinatėse. Antroji skyriaus dalis skirta plokščių skaitiniams optimizavimo uždaviniams taikant klasikinį von Mizeso takumo kriterijų. Pateikiamas skaitinis plokštės ribinių lenkimo momentų optimizavimo skaitinis eksperimentas. Trečioji skyriaus dalis skirta specifinės, integralinės takumo sąlygos pritaikymui plokštės analizės ir optimizavimo uždaviniuose. Parodoma, kaip prisitaikomumo uždaviniuose galima taikyti integralinę von Mizeso takumo sąlygą ir tokiu būdu sumažinti optimizavimo uždavinio netiesinių apribojimų skaičių. Dviem skaitiniais eksperimentais demonstruojami metodo privalumai ir trūkumai, kuriems pasiūlytas sprendimo būdas. Skyrius baigiamas išvadomis. Disertacijos autorius yra pasakelbęs dvi publikacijas skirtas plokščių optimizavimo uždaviniams nagrinėti: (Blaževičius *et al.* 2014; Blaževičius, Atkočiūnas 2015).

### 4.1. Apvalios simetrinės plokštės diskretizacija

Plokščių diskretizacijai taikomas pusiausvirųjų baigtinių elementų modelis. Pirmiausia aptariamas tampriųjų įrąžų ir poslinkių skaičiavimas (Kalanta 1995). Diskretinis apvalios simetrinės plokštės modelis sudaromas iš žiedus atitinkančių tiesinių elementų, turinčių po tris skaičiuojamuosius mazgus (4.1 pav.). Paveiksle parodytos teigiamos veikiančių įrąžų kryptys. Polinės koordinatės sistemos pradžia pasirinkus plokštės simetrijos ašį, pakanka nagrinėti tik vieną plokštės spindulį, nes įrąžos ir poslinkiai nepriklauso nuo kampinės koordinatės.



4.1 pav. Apvalios simetrinės plokštės baigtinis elementas ir jo teigiamos įrąžų kryptys.

Ryšys tarp lokaliųjų ir globaliųjų koordinatės

Fig. 4.1. Finite element of a circular symmetric plate and its positive internal forces.

Relation between global and local coordinates

Tokios plokštės įtempių būvis išreiškiamas lenkimo momentų vektoriumi  $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \dots \quad \mathbf{M}_\zeta]^T$ ,  $\zeta = s \times v$ , čia  $s$  – baigtinių elementų skaičius ( $k=1, 2, \dots, s, k \in K$ ), o  $v$  yra kiekvieno elemento mazgų skaičius. Taigi iš viso yra  $\zeta$  skaičiuojamųjų mazgų:  $i=1, 2, \dots, \zeta, i \in I$ . Simetrinėje plokštėje pakanka nagrinėti du, nuo spindulio  $\rho$  koordinatės priklausančius lenkimo momentus (radialinį  $M_{k,\rho}(\rho)$  ir tangentinį  $M_{k,\theta}(\rho)$ ). Bet kuriame elemento  $k$  taške lenkimo momentai  $\mathbf{M}_k(\rho)$  išreiškiami mazginiais momentais  $\mathbf{M}_k$ :

$$\mathbf{M}_k(\rho) = \begin{bmatrix} M_{k,\rho}(\rho) \\ M_{k,\theta}(\rho) \end{bmatrix} = \mathbf{H}_k(\rho) \cdot \mathbf{M}_k. \quad (4.1)$$

Čia  $\mathbf{H}_k(\rho)$  yra įrašų aproksimacijos matrica.

Elemento mazginių lenkimo momentų vektorius turi šešis komponentus:  $\mathbf{M}_k = [M_{\rho,k,1} \ M_{\theta,k,1} \ M_{\rho,k,2} \ M_{\theta,k,2} \ M_{\rho,k,3} \ M_{\theta,k,3}]^T$ , aproksimacijos matrica  $\mathbf{H}_k(\rho)$  globaliosiose koordinatėse užrašoma taip:

$$\mathbf{H}_k(\rho) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

čia koeficientai yra:

$$A_1 = \frac{(\rho - \rho_2)(\rho + \rho_1 - 2\rho_2)}{2(\rho_1 - \rho_2)^2}, \quad A_2 = \frac{-(\rho - \rho_1)(\rho + \rho_1 - 2\rho_2)}{2(\rho_1 - \rho_2)^2},$$

$$A_3 = \frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{2(\rho_1 - \rho_2)^2}.$$

Ryšys tarp globaliųjų  $\rho_k$  ir lokaliųjų  $\xi_k$  koordinatžių (4.1 pav.) išreiškiamas taip:

$$\xi_k = \frac{\rho_k - \rho_{k,2}}{b_k}, \quad \rho_k(\xi) = \rho_{k,2} + \xi_k \cdot b_k = \rho_{k,2} + \xi_k \cdot (\rho_{k,2} - \rho_{k,1}), \quad (4.3)$$

čia  $\rho_{k,2}$  – antrojo (viduriniojo) elemento mazgo koordinatė;  $b_k$  – pusė elemento pločio. Lokalių koordinatžių lenkimo momentų aproksimacijos matrica gaunama keičiant minėtąsias koordinatas:

$$\mathbf{H}_k(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k) & & 1 - \xi_k^2 & & \frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k) & \\ & \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k) & & 1 - \xi_k^2 & & \frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Tuomet mazginės elemento įrašos bet kuriame lokaliame taške  $\xi$  yra

$$\mathbf{M}_k(\xi) = [\mathbf{H}_k(\xi)] \cdot \mathbf{M}_k.$$

Jeigu konstrukcijos laisvumo laipsnis yra  $m$ , tuomet globaliųjų poslinkių ir išorinių apkrovų vektoriai yra atitinkamai  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$  ir

$\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]^T$ . Galiausiai, įvertinus kraštines sąlygas, gaunamos sistemos pusiausvyros lygtys:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{F} \quad \text{arba} \quad \sum_k \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{F}, \quad (4.5)$$

čia  $\mathbf{A} (m \times n)$  – pusiausvyros matrica.

Konstrukcijos deformacijų būvis išreiškiamas mazginiais poslinkiais  $\mathbf{u}$  ir elementų deformacijomis  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_\zeta]^T$ :  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{D}\mathbf{M}$ . Tuomet diskretinės konstrukcijos geometrinės lygtys užrašomos taip:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D}\mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (4.6)$$

čia  $\mathbf{D} = \text{diag}[\mathbf{D}_k]$  ( $n \times n$ ) yra kvazidiagonalioji elementų pasidavimo matrica. Atskiro elemento  $k$  pasidavimo matrica išreiškiama formule:

$$\mathbf{D}_k = \int_{A_k} [\mathbf{H}_k(\rho)]^T \mathbf{d}_k [\mathbf{H}_k(\rho)] dA_k = \int_{\rho_1}^{\rho_3} 2\pi\rho [\mathbf{H}_k(\rho)]^T \mathbf{d}_k [\mathbf{H}_k(\rho)] d\rho, \quad (4.7)$$

čia  $\mathbf{d}_k$  – be galo mažo elemento pasidavimas:

$$\mathbf{d}_k = \frac{1}{K_k(1-\nu_k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_k \\ -\nu_k & 1 \end{bmatrix}, \quad K_k = \frac{E_k t_k^3}{12(1-\nu_k^2)}.$$

Pakeitus globaliąsias koordinates lokaliomis:  $\rho(\xi) = \rho_2 + \xi \cdot b_k$ ,  $\rho'(\xi) = b_k$ , (4.7) išraišką galima perrašyti:

$$\mathbf{D}_k = 2\pi b_k \int_{-1}^1 [\mathbf{H}_k(\xi)]^T \mathbf{d}_k [\mathbf{H}_k(\xi)] \cdot (\rho_2 + \xi \cdot b_k) d\xi. \quad (4.8)$$

Tamprieji lenkimo momentai  $\mathbf{M}_{ej}$  ir poslinkiai  $\mathbf{u}_{ej}$  skaičiuojami naudojant influentines matricas  $\boldsymbol{\alpha}$  ir  $\boldsymbol{\beta}$ :  $\mathbf{M}_{ej} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}_j$ ,  $\mathbf{u}_{ej} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{F}_j$ ,  $j \in J$ . Čia matricos išreiškiamos taip pat kaip ir strypinėms konstrukcijoms:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^T)^{-1}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{K}\mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}. \quad (4.9)$$



Prisitaikomumo būvio liekamieji lenkimo momentai  $\mathbf{M}_r$  yra sau pusiausvyrieji:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_r = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Kinematiškai leidžiami liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  turi tenkinti geometrines lygtis:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \boldsymbol{\theta}_r, \quad \boldsymbol{\theta}_r = \mathbf{D}\mathbf{M}_r + \boldsymbol{\theta}_p, \quad (4.11)$$

čia  $\boldsymbol{\theta}_p = [\theta_{p1} \quad \theta_{p2} \quad \dots \quad \theta_{p\zeta}]^T$  – plastinių deformacijų vektorius. Liekamosios deformacijos ir liekamieji poslinkiai, kaip ir strypinėms konstrukcijoms, prisitaikomumo būvyje gali būti nevieninteliai: jie priklauso nuo apkrovimo istorijos  $F(t)$ , tačiau gali būti nustatytos jų kitimo ribos (Atkociunas *et al.* 2004).

## 4.2. Plokštės optimizavimas taikant von Mizeso takumo kriterijų

Prisitaikančios plokštės optimalaus ribinių lenkimo momentų pasiskirstymo nustatymo uždavinys formuluojamas taip:

$$\min \mathcal{F}(\mathbf{M}_0), \quad (4.12)$$

kai

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = (\mathbf{M}_0)^2 - \Gamma(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ej})^T \Pi(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B}_r \mathbf{S}_r = \mathbf{B}_p \boldsymbol{\theta}_p, \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\theta}_p = 2 \sum_j \Pi \Gamma^T(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ej})^T \boldsymbol{\lambda}_j, \quad (4.16)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{M}_{0,\min} \leq \mathbf{M}_0 \leq \mathbf{M}_{0,\max}, \quad (4.18)$$

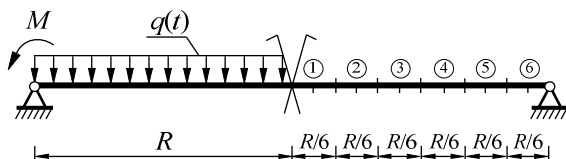
$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{ej} + \left[ \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \left( \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{M}_r + \boldsymbol{\theta}_p^{(1)} \right) \right] \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{M}_{ej} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{ej} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}_j, \quad j \in J. \quad (4.20)$$

Uždavinio nežinomieji yra  $M_0$ ,  $M_r$ ,  $\lambda_j$ . Plastinių deformacijų vektoriaus  $\theta_p$  struktūra yra tokia:  $\theta_p = \begin{bmatrix} \theta_p^{(1)} & \theta_p^{(2)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_{p1} & \theta_{p2} & \dots & \theta_{pn} \end{bmatrix}^T$ . Laikoma, kad ribinis lenkimo momentas  $M_0$  yra pastovus visame baigtiniame elemente.

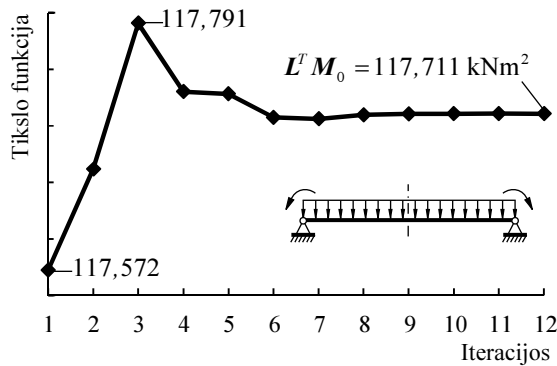
### Skaitinis eksperimentas

Nagrinėjama lankstais išoriniu kontūru paremta plokštė, kurios spindulys yra  $R = 0,9$  m (4.2 pav.). Plokštė yra apkrauta tolygiai ir simetriškai išskirstyta apkrova, kuri gali kisti intervale  $-95 \text{ kN/m}^2 \leq q(t) \leq 100 \text{ kN/m}^2$  ir pastoviu tolygiai išskirstytu lenkimo momentu  $M = 36,25 \text{ kN}$  išoriniame plokštės kontūre. Medžiagos tamprumo modulis  $E = 210 \text{ GPa}$ , takumo įtempis  $\sigma_y = 210 \text{ MPa}$ , Puasono koeficientas  $\nu = 1/3$  pradinis plokštės storis  $t = 0,03$  m. Reikia rasti optimalius plokštės elementų ribinius momentus  $M_{0,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$  taikant (4.12)–(4.20) matematinį modelį. Šie momentai nulemia reikiamą plokštės storį  $t$ :  $M_{0,k} = \sigma_y t_k^2 / 4$ . Ribojamas plokštės vidurio taško vertikalus poslinkis  $-0,03 \text{ m} \leq u_{r,1} + u_{ej,1} \leq 0,03 \text{ m}$ .



4.2 pav. Plokštės diskretinis modelis ir apkrovimas  
Fig. 4.2. Loading and discrete model of the circular plate

Plokštės skaitinei diskretizacijai pritaikyta programa SM3, kuri suformuoja pusiausvyros lygčių koeficientų matricą (Karkauskas *et al.* 1995), o optimizavimo uždavinys išspręstas naudojant programinį paketą Matlab. Optimizavimo iteracijų rezultatai pateikti 4.1 lentelėje. Paskutinėje eilutėje įrašyti optimalūs elementų storiai. Optimalus sprendinys pasiekiamas, kai matoma sprendinių konvergencija ir gretimi sprendiniai įgyja labai artimas (norimu tikslumu) reikšmes (4.3 pav.).



4.3 pav. Tikslo funkcijos konvergavimas optimalaus sprendinio link  
Fig. 4.3. The convergence of the objective function

4.1 lentelė. Ribinių lenkimo momentų reikšmės optimizavimo iteracijose ir optimalūs elementų storiai

Table 4.1. Values of the limiting bending moments within iterations and optimal elements' thickness

Iteracija	$M_{0,1}$ , kN	$M_{0,2}$ , kN	$M_{0,3}$ , kN	$M_{0,4}$ , kN	$M_{0,5}$ , kN	$M_{0,6}$ , kN
1	52,402	52,395	51,178	48,930	45,134	40,829
2	53,134	53,222	52,391	49,681	44,831	39,871
3	53,623	53,779	52,189	49,462	45,562	39,473
...	...	...	...	...	...	...
10	52,410	52,414	52,444	50,041	45,810	39,166
11	52,411	52,415	52,445	50,038	45,810	39,166
12	52,411	52,415	52,445	50,038	45,810	39,166
$t$ , mm	31,6	31,6	31,6	30,9	29,5	27,3

Atliktas skaitinis eksperimentas parodė, kad liekamųjų deformacijų darnos lygčių panaudojimas leidžia efektyviai spręsti prisitaikančios plokštės optimizavimo uždavinius, esant netiesinėms von Mizeso takumo sąlygoms. Šiame poskyryje pritaikyta metodika įgalina mažinti kintamųjų skaičių ir užtikrina sėkmingą realių parametrų plokštės optimizavimo proceso konvergavimą. Toliau plėtojama metodika galėtų būti pritaikyta praktiniam lenkiamų plokščių uždavinių sprendimui įvertinant saugos ir tinkamumo ribinius būvius.

### 4.3. Plokštės optimizavimas taikant integralinį von Mizeso takumo kriterijų

Takumo sąlygos tikrinamos kiekviename taške  $i \in I$ , kiekvienai apkrovos kombinacijai (apkrovimo srities viršūnei)  $j \in J$ :

$$\varphi_{ij} = M_{0i} - f_{ij}(\mathbf{M}_{ri} + \mathbf{M}_{ei,j}) \geq 0. \quad (4.21)$$

Visai konstrukcijai takumo sąlygos užrašomos matricine forma:

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{M}_0 - \mathbf{f}_j(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{e,j}) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J. \quad (4.22)$$

Von Mizeso takumo kriterijus apvalios simetrinės plokštės taškui (pjūviui) matricine forma gali būti užrašytas taip:

$$\mathbf{M}_k^T [\mathbf{H}_k(\rho)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\rho)] \mathbf{M}_k \leq (M_{0,k})^2, \text{ čia } \boldsymbol{\Pi}_k = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Integruojant abi (4.23) nelygybės puses viso elemento ilgyje  $L_k = 2b_k$ , gaunama integralinė takumo sąlyga (gali būti vadinama vidurkio takumo sąlyga):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k^T \left\{ \int_{L_k} [\mathbf{H}_k(\rho)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\rho)] dA_k \right\} \mathbf{M}_k = \\ \mathbf{M}_k^T \left\{ \int_{\rho_1}^{\rho_3} [\mathbf{H}_k(\rho)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\rho)] d\rho \right\} \mathbf{M}_k \leq L_k (M_{0,k})^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pakeičiant globaliąsias koordinates lokaliomis, gaunama:

$$\mathbf{M}_k^T \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\mathbf{H}_k(\xi)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\xi)] d\xi \right\} \mathbf{M}_k \leq (M_{0,k})^2. \quad (4.25)$$

Čia patogų įvesti pažymėjimą  $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\mathbf{H}_k(\xi)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\xi)] d\xi$ , kuris vadinamas integraline takumo matrica.

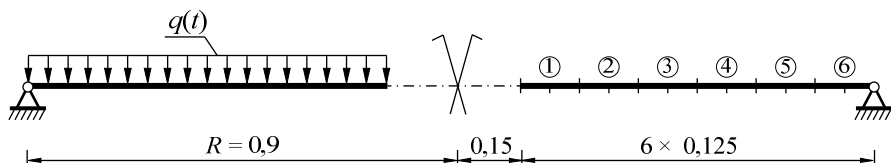
Tokiu atveju (4.25) sąlyga tampa  $\mathbf{M}_k^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{M}_k \leq (M_{0,k})^2$ , kurioje:

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -0,5 & -0,5 & 0,25 \\ -1 & 2 & -0,5 & 1 & 0,25 & -0,5 \\ 1 & -0,5 & 8 & -4 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -4 & 8 & -0,5 & 1 \\ -0,5 & 0,25 & 1 & -0,5 & 2 & -1 \\ 0,25 & -0,5 & -0,5 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

(4.26) matrica pirmą kartą buvo išvesta Čyro ir Kalantos (Čyras, Kalanta, 1977), bet, autoriaus žiniomis, niekada nebuvo pritaikyta prisitaikomumo uždaviniams. Tokia matrica sumažina takumo sąlygų skaičių: vietoj trijų taškinių sąlygų elementui užrašoma tik viena integralinė sąlyga (Kačianauskas, Čyras 1988; Nguyen Dang Hung, König 1976). Tokiu būdu sumažėja matematinio programavimo uždavinys, o tai aktualu optimizuojant realias konstrukcijas, veikiamas daugelio kintamųjų apkrovų.

### 1 skaitinis eksperimentas

Nagrinėjama lanksčiai paremta, 0,9 m spindulio žiedinė plokštė (4.4 pav.). Plokštė veikiama simetrinės, tolygiai išskirstytos apkrovos, galinčios kisti  $-75 \text{ kN/m}^2 \leq q(t) \leq 150 \text{ kN/m}^2$  intervale. Medžiagos tamprumo modulis yra  $E = 210 \text{ GPa}$ , takumo įtempis –  $\sigma_y = 210 \text{ MPa}$ , Puasono koeficientas –  $\nu = 1/3$ , pradinis elementų storis –  $t_k = 0,02 \text{ m}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ . Reikia rasti optimalius ribinius lenkimo momentus pagal (4.12)–(4.20) uždavinį. Šiuo atveju plokštės įlinkiai nėra ribojami, taigi gaunamas ciklinis plastinės suirties uždavinio matematinis modelis. Siekiant palyginti integralinių takumo sąlygų įtaką uždavinys sprendžiamas du kartus: su (4.14) taškinėmis takumo sąlygomis ir su (4.25) integralinėmis sąlygomis. Iš gautų lenkimo momentų galima suskaičiuoti plokštės elementų storius, nes  $M_{0,k} = \sigma_y t_k^2 / 4$ . Optimizavimo rezultatai pateikti 4.2 lentelėje.

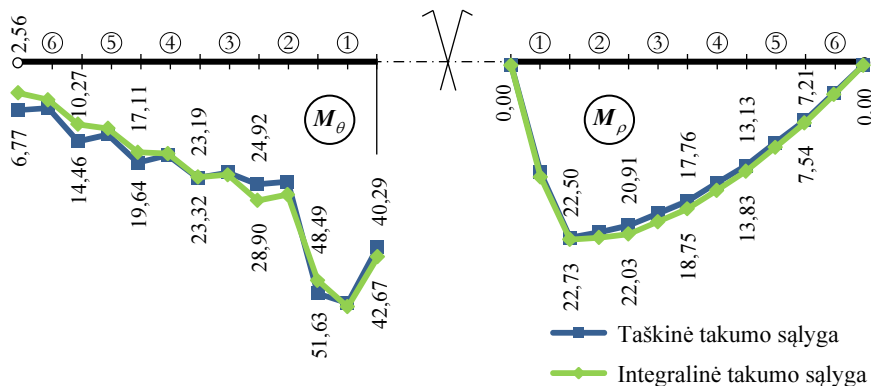


4.4 pav. Žiedinės plokštės diskretinis modelis  
Fig. 4.4. Discrete model of the annular plate

**4.2 lentelė.** Žiedinės plokštės optimizavimo rezultatai**Table 4.2.** Optimisation results of the annular plate

Mizeso takumo sąlyga	Tikslo funkcija $L^T M_0$ , kNm <sup>2</sup>	Ribiniai lenkimo momentai $M_{0,k}$ , kN						Laikas, s
		$M_{0,1}$	$M_{0,2}$	$M_{0,3}$	$M_{0,4}$	$M_{0,5}$	$M_{0,6}$	
Integralioji	39,450	46,979	25,346	21,675	16,960	11,152	4,486	1,95
Taškinė	41,358	48,510	23,176	21,093	17,326	12,526	6,769	2,85

Optimizavimo uždavinys sprendžiamas iteracijomis, nes tamprus sprendinys, naudojamas apribojimuose, priklauso nuo nežinomųjų plokštės elementų storių. Tačiau toks uždavinys konverguoja gana greitai – autoriaus patirtis rodo, kad užtenka penkių iteracijų pakankamo tikslumo konvergencijai pasiekti. Realus laikas, kurio reikia vidutiniam asmeniniam kompiuteriui išspręsti 5 uždavinio iteracijoms, pateiktas paskutinėje 4.2 lentelės grafoje. Kaip matoma iš rezultatų, uždavinys su integraline takumo sąlyga išspręstas 32 % greičiau. Šio uždavinio tikslo funkcijos reikšmė šiek tiek mažesnė (4,6 %), nei uždavinio su taškinėmis sąlygomis, tačiau gautas lenkimo momentų pasiskirstymas abiem atvejais labai panašus. 4.5 paveiksle pateikti detalūs lenkimo momentų  $M_{q=150} = M_{e,q=150} + M_r$  rezultatai. Taigi, šiuo konkrečiu pavyzdžiu, integralinės takumo sąlygos taikymas atrodo labai pagrįstas, nes gerokai sumažina skaičiavimų laiką, o rezultatų tikslumas visiškai pakankamas.

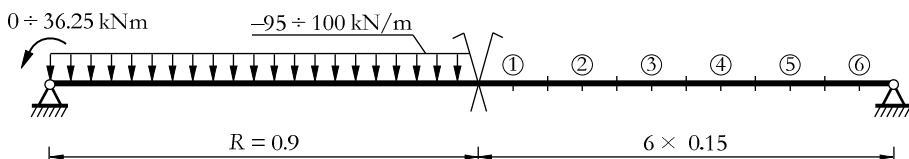
**4.5 pav.** Žiedinės plokštės lenkimo momentų diagramos (kN)**Fig. 4.5.** Bending moment diagrams (kN) of the annular plate

## 2 skaitinis eksperimentas

Nagrinėjama išoriniu kontūru lankstais paremta apvali simetrinė plokštė. Plokštė veikiama simetrinės, tolygiai išskirstytos apkrovos, galinčios kisti  $-95 \text{ kN/m}^2 \leq q(t) \leq 100 \text{ kN/m}^2$  intervale ir koncentruoto momento išoriniame kontūre, kintančio  $0 \leq M(t) \leq 36,25 \text{ kN/m}$  intervale (4.6 pav.). Medžiagos tamprumo modulis yra  $E = 210 \text{ GPa}$ , takumo įtempis –  $\sigma_y = 210 \text{ MPa}$ , Puasono koeficientas –  $\nu = 1/3$ , pradinis elementų storis –  $t_k = 0,02 \text{ m}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

Reikia rasti optimalius ribinius lenkimo momentus pagal (4.12)–(4.20) uždavinį, be poslinkių ribojimų (4.19). Palyginimui sprendžiami trys optimizavimo uždaviniai:

- taikant taškines von Mizeso takumo sąlygas,
- taikant integralines takumo sąlygas,
- su kombinuotomis takumo sąlygomis (taškinėmis tik plokštės viduryje).



4.6 pav. Apvalios plokštės diskretinis modelis

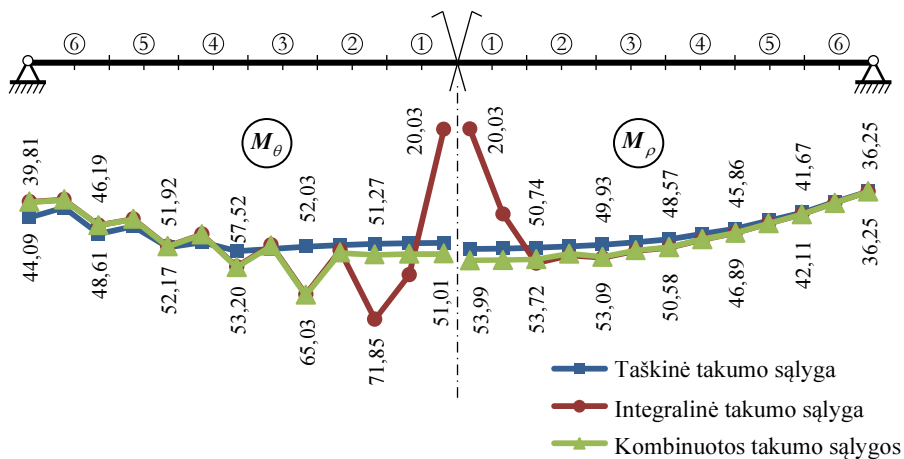
Fig. 4.6. Discrete model of the circular plate

Kadangi nagrinėjamas tik plokštės spindulys (jo pakanka, nes plokštė simetrinė), atsiranda sunkumų įvertinti plokštės centro simetrijos sąlygas. Todėl, rašant takumo sąlygą visam pirmajam elementui, gaunamas ne visai korektiškas momentų pasiskirstymas (4.7 pav.).

Detaliau nagrinėjant optimizavimo rezultatus (4.3 lentelė), galima daryti išvadą, kad, taikant integraliąją takumo sąlygą, gaunama beveik identiška tikslo funkcijos reikšmė (0,8 % mažesnė). Pritaikius kombinuotąsias sąlygas, tikslo funkcija visiškai priartėja prie gaunamos taškinių sąlygų atveju (0,2 % mažesnė už taškinių).

**4.3 lentelė.** Apvalios plokštės optimizavimo rezultatai**Table 4.3.** Optimisation results of the circular plate

Mizeso takumo sąlyga	Tikslo funkcija $L^T M_0$ , kNm <sup>2</sup>	Ribiniai lenkimo momentai $M_{0,k}$ , kN						Laikas, s
		$M_{0,1}$	$M_{0,2}$	$M_{0,3}$	$M_{0,4}$	$M_{0,5}$	$M_{0,6}$	
Integralioji	116,538	51,32	54,03	51,99	48,83	44,59	39,28	7,66
Taškinė	117,517	51,01	51,01	51,05	49,32	45,54	40,74	6,54
Kombinuota	116,798	53,99	54,05	52,03	48,87	44,62	39,31	7,93

**4.7 pav.** Plokštės lenkimo momentų diagramos, kN**Fig. 4.7.** Bending moment diagrams of the plate in kN

Disertacijos autorius siūlo taškuose kuriuose yra įtempių koncentracija ar sudėtingos kraštinės sąlygos (taip pat ir simetrijos sąlygos) taikyti taškinės takumo sąlygas, o esant tolydžiajam įtempių būviui – integralines. Kadangi tamprieji lenkimo momentai bet kuriuo atveju skaičiuojami trims elemento taškams, toks dvejetainis takumo sąlygų užrašymas neapsunkina matematinio programavimo uždavinio. Kita vertus, tai leidžia sumažinti netiesinių takumo sąlygų skaičių uždavinyje ir taip supaprastinti sprendimą. Kaip rodo rezultatai (4.7 pav.), kombinuotos takumo sąlygos užtikrina pakankamą rezultatų tikslumą.



#### 4.4. Ketvirtojo skyriaus išvados

1. Integralinės takumo sąlygos pagrįstai taikomos tampriųjų plastinių konstrukcijų skaičiavime baigtinių elementų metodu (šio metodo pasidavimo ir takumo matricos taip pat gaunamos integravimo būdu). Skaitiniai rezultatai parodė, kad integralinės takumo sąlygos naudotinos uždaviniams su tolydžiais vidinių jėgų pasiskirstymo laukais.
2. Išnagrinėti skaitiniai eksperimentai parodė, kad taikant integralinę takumo sąlygą gaunama kiek mažesnė plokštės optimizavimo tikslo funkcijos reikšmė – 4,6% ir 0,8% atitinkamai pirmajame ir antrajame uždaviniuose. Pritaikius autoriaus siūlomas kombinuotąsias takumo sąlygas, tikslo funkcijos reikšmė tampa tik 0,2% mažesnė už taškinių sąlygų atvejį (antrasis eksperimentas). Tai reiškia, kad toks pats rezultatas pasiekiamas su mažiau netiesinių takumo sąlygų, o tai palengvina matematinę programavimo uždavinio realizaciją.
3. Skaitiniai rezultatai parodė, kad pusiausvirųjų baigtinių elementų formuluotė leidžia taikyti sąlygiškai retą elementų tinklą, tačiau, tais atvejais, kai naudojamos integralinės takumo sąlygos, specifinėse konstrukcijos vietose reikėtų didinti šio tinklo tankumą.
4. Konstrukcijos vietose, kur yra įtempių koncentracijos ar sudėtingos kraštinės sąlygos, rekomenduojama taikyti kombinuotas takumo sąlygas – taškines ties koncentratoriais, integralines – tolydžiųjų įtempių laukuose.



---

## Bendrosios išvados

1. Konstrukcijos ciklinės plastiškosios suirties būviui naujai įrodytas Melano ir Koiterio teoremų dualumas. Remiantis matematinio programavimo išvadomis įrodyta, kad nesuirimo atveju galioja klasikinis Koiterio teoremos teiginys.
2. Įrodyta, kad duotoms apkrovų kitimo riboms prisitaikomumo būvis pasiekiamas, esant vieninteliame liekamųjų įrašų pasiskirstymui (nauja išvada Melano teoremai).
3. Disertacijoje sukurtos teorinės ir praktinės konkrečių statybinių konstrukcijų – santvarų, rėmų, plokščių – optimizavimo prisitaikomumo stadijoje uždavinių formuluotės (remiantis ekstreminiais energiniais principais, baigtinių elementų metodu ir matematinio programavimu). Sukurtieji uždaviniai gali būti sėkmingai taikomi rengiant ekonomiškесnius, palyginus su įprasta projektavimo praktika, statybinių konstrukcijų projektus.
4. Konstrukcijos optimalumo kriterijus kartu su Oilerio-Lagranžo lygtimis sudaro prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinio matematinio modelio pagrindą. Kinematinė prisitaikomumo uždavinio formuluotė įrodo, kad sudarytasis optimizavimo uždavinio matematinis modelis galioja holonominiam plastinio deformavimo procesui.

Ypač svarbioms konstrukcijoms būtina papildomai tikrinti tinkamumo ribinio būvio sąlygas viršutinėms ir apatinėms liekamųjų poslinkių reikšmėms.

5. Disertacijoje teoriškai ir praktiškai pagrindžiama, kad prisitaikančios konstrukcijos optimizavimo uždavinyje turi būti derinami eukodo saugos ir tinkamumo ribiniai būviai, taikant skirtingus dalinius koeficientus poslinkių ribojimams ir prisitaikomumo sąlygoms.
6. Disertaciniame darbe plastiškai deformuojamų elementų klupumo apribojimai derinami su matematinio programavimo griežtumo sąlygomis. Įrodoma, kad griežtumo sąlygos prieštarauja standartų reikalavimams ir nėra pakankamos norint užtikrinti konstrukcijos prisitaikomumo būvį. Šiai kolizijai spręsti, disertacijoje sukurtos papildomos optimizavimo uždavinio plastinių daugiklių ribojimo sąlygos ir pateikti tokių sąlygų taikymo skaitiniai eksperimentai.
7. Rėminių konstrukcijų optimizavimo uždavinių rezultatai parodė, kad tikrasis prisitaikiosios konstrukcijos projektas gerokai skiriasi nuo paprastosios ciklinės plastiškosios suirties (21,2% tikslo funkcijos skirtumas tarp modelių A ir D pirmajame eksperimente). Autoriaus pasiūlytos papildomos pastinių daugiklių sąlygos uždavinio tikslo funkcijos reikšmę padidina nedaug (2,7% ir 2,9% atitinkamai pirmajame ir antrajame rėmo optimizavimo eksperimentuose). Optimizuojant santvaras dėl šių esminių sąlygų taip pat gaunamas tik nežymus optimalios konstrukcijos tūrio padidėjimas (atitinkamai 2,0% ir 7,8% pirmajame ir antrajame eksperimentuose). Tokia atsarga leidžia išvengti galimos konstrukcijos suirties dėl klaidingo klupdomųjų elementų elgsenos įvertinimo.
8. Disertacijoje pateiktais santvaros, rėmo ir lenkiamosios plokštės skaitiniais optimizavimo eksperimentais pademonstruota, kad prisitaikomumo teorija taikytina rengiant standartizuotus plieninių konstrukcijų projektus.

---

## Literatūra

Abdel-Karim, M. 2005. Shakedown of complex structures according to various hardening rules, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 82(6): 427–458. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2005.01.007.

Aliawdin, P.; Urbanska, K. 2013. Limit analysis of geometrically hardening rod systems using bilevel programming *Modern Building Materials, Structures and Techniques*. DOI: 10.1016/j.proeng.2013.04.014 .

Aliawdin, P. W. 2005. *Limit analysis of structures under variable loads*. Technoprint, 282 p.

Alyavdin, P. V. 2005. *Predelnyy analiz konstruktsiy pri povtornykh nagruzheniyakh* [Limit analysis of structures under repeated loading], Minsk: Tekhnoprint.

Armand, J.-L. 1971. Application of the theory of optimal control of distributed – parameter system to structural optimization. Stanford University, 154 p.

Armero, F.; Perez-Foguet, A. 2002. On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity-part I: The variational structure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53(2): 297–329. DOI: 10.1002/nme.278.

Askari, F.; Arvin, M. R.; Farzaneh O. 2013. Shakedown method versus pseudostatic method for seismic slope stability, *IJCE*. 2013; 11 (2) :133-140.

Atkociūnas, J.; Jarmolajeva, E.; Merkevičiūtė, D. 2004. Optimal shakedown loading for circular plates, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 27(3): 178–188. DOI: 10.1007/s00158-003-0308-5.

Atkočiūnas, J. 1999. Mathematical models of optimization problems at shakedown, *Mechanics Research Communications* 26(3): 319–326. DOI: 10.1016/S0093-6413(99)00030-0.

Atkočiūnas, J. 2011. *Optimal Shakedown Design of Elastic-Plastic Structures*, Vilnius, Lithuania: Vilnius Gediminas Technical University. DOI: 10.3846/1240-S, 300 p.

Atkočiūnas, J.; Borkowski, A.; König, J. A. 1981. Improved bounds for displacements at shakedown, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 28(3): 365–376. DOI: 10.1016/0045-7825(81)90007-4.

Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Tamprųjų plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimas*, Vilnius, Lithuania: Vilnius Gediminas Technical University. DOI: 10.3846/1137-S, 376 p.

Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskųs, A. 2008. Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiffness and stability constraints, *Computers & Structures* 86(17-18): 1757–1768. DOI: 10.1016/j.compstruc.2008.01.008.

Atkočiūnas, J.; Rimkus, L.; Skaržauskas, V.; Jarmolajeva, E. 2007. Optimal shakedown design of plates, *Mechanika* 5(67): 14–23.

Atkočiūnas, J.; Venskųs, A.; 2011. Optimal shakedown design of frames under stability conditions according to standards, *Computers & Structures* 89(3-4): 435–443. DOI: 10.1016/j.compstruc.2010.11.014.

Barauskas, R.; Kačianauskas, R.; Belevičius, R. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai*, Vilnius: Technika, 612 p.

Baronas, R. P.; Čyras A. 1971. Linear programming methods of displacement analysis in elastic-plastic frames, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3(3): 415–423. DOI: 10.1002/nme.1620030310.

Bazaraa, M. S.; Sherali, H. D.; Shetty, C. M. 2006. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience, 872 p.

Belytschko, T. 1972. Plane stress shakedown analysis by finite elements, *International Journal of Mechanical Sciences* 14(9): 619–625. DOI: 10.1016/0020-7403(72)90061-6.

Benfratello, S.; Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Tabbuso P. 2013. Optimal design of steel frames accounting for buckling, *Meccanica* 48(9): 2281–2298. DOI: 10.1007/s11012-013-9745-4.

Benfratello, S.; Palizzolo, L.; Tabbuso, P. 2013. Optimal design of elastic plastic frames accounting for seismic protection devices, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 49(1): 93–106. DOI: 10.1007/s00158-013-0959-9.

Bilotta, A.; Leonetti, L.; Garcea, G. 2012. An algorithm for incremental elastoplastic analysis using equality constrained sequential quadratic programming, *Computers & Structures* 102-103: 97–107. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.03.004.

Bisbos, C. D.; Ampatzis, A. T. 2008. Shakedown analysis of spatial frames with parameterized load domain, *Engineering Structures* 30(11): 3119–3128. DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.04.022.

Bleich, H. 1932. Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes, *Bauingenieur* 13(19/20): 261–266.

Bodovillé, G.; Saxcé, G. De 2001. Plasticity with non-linear kinematic hardening: modelling and shakedown analysis by the bipotential approach, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 20(1): 99–112. DOI: 10.1016/S0997-7538(00)01109-8.

Bouby, C.; de Saxcé, G.; Tritsch, J.-B. 2009. Shakedown analysis: Comparison between models with the linear unlimited, linear limited and non-linear kinematic hardening, *Mechanics Research Communications* 36(5): 556–562. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2009.02.007.

Boulbibane M., Collins I. F., Pontier a. R. S., Weichert D. 2005. Shakedown of Unbound Pavements, *Road Materials and Pavement Design* 6(1): 81–96. DOI: 10.1080/14680629.2005.9690000.

Bousshine, L.; Chaaba, A.; De Saxce, G. 2003. A new approach to shakedown analysis for non-standard elastoplastic material by the bipotential, *International Journal of Plasticity* 19(5): 583–598. DOI: 10.1016/S0749-6419(01)00070-5.

Bree, J. 1967. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 2(3): 226–238. DOI: 10.1243/03093247V023226.

Capurso, M. 1974. A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cyclic loads, *International Journal of Solids and Structures* 10(1): 77–92.

Capurso, M.; Corradi, L.; Maier, G. 1978. Bounds on deformations and displacements in shakedown theory *Proc. Matériaux et Structures sous Chargement Cyclique*, Palaiseau, France.

Casciaro, R.; Garcea, G. 2002. An iterative method for shakedown analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191(49-50): 5761–5792. DOI: 10.1016/S0045-7825(02)00496-6.

Chazallon, C.; Habiballah, T. 2005. Finite Elements Modelling of Flexible Pavements with the Shakedown Concept, *Road Materials and Pavement Design* 6(1): 97–117. DOI: 10.1080/14680629.2005.9690001.

Chazallon, C.; Koval, G.; Hornych, P.; Allou, F.; Mouhoubi, S. 2009. Modelling of rutting of two flexible pavements with the shakedown theory and the finite element method, *Computers and Geotechnics* 36(5): 798–809. DOI: 10.1016/j.compgeo.2009.01.007.

Clausen, J.; Damkilde, L.; Andersen, L. 2006. Efficient return algorithms for associated plasticity with multiple yield planes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 66(6): 1036–1059. DOI: 10.1002/nme.1595.

Cocchetti, G.; Maier G. 2003. Elastic–plastic and limit-state analyses of frames with softening plastic-hinge models by mathematical programming, *International Journal of Solids and Structures* 40(25): 7219–7244. DOI: doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00363-9.

Cohn, M. Z.; Maier, G. 1979. NATO Advanced Study Institute, University of Waterloo, 1977, *Proceedings, Engineering plasticity by mathematical programming*, New York: Pergamon Press.

Collins, I. F.; Boulbibane, M. 2000. Geomechanical Analysis of Unbound Pavements Based on Shakedown Theory, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 126(1): 50–59. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:1(50).

Corradi, L.; Donato, O. 1975. Dynamic shakedown theory allowing for second order geometric effects, *Meccanica* 10(2): 93–98. DOI: 10.1007/BF02314746.

Corradi, L.; Zavelani, A. 1974. A linear programming approach to shakedown analysis of structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3(1): 37–53. DOI: 10.1016/0045-7825(74)90041-3.

Cox, H. L. 1965. The design of structures of least weight. Pergammon Press, 134 p.

Čyras, A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*, Chichester: Ellis Horwood, 121 p.

Čyras, A. 1969. *Metody lineynogo programmirovaniya pri raschete uprugo-plasticheskikh sistem* (in Russian), Leningrad: Stroyizdat.

Čyras, A., Atkočiūnas J. 1970. The analysis of perfectly elastic-plastic body under cyclic load, *Litovskiy mekhanicheskij sbornik* 2(7): 33–43 (in Russian).

Čyras, A.; Kalanta, S. 1977. Opredelenie matritsy funktsii tekuchesti konechnogo elemeta, *Deponirovanno v LitNIINTI* 195(77).

Čyras, A. A.; Borkauskas, A. E.; Karkauskas, R. P. 1974. *Theory and methods of optimization elastic-plastic systems* (in Russian), Leningrad: Stroyizdat, 354 p.

Dang Van, K.; de Saxcé, G.; Maier, G.; Polizzotto, C.; Ponter, A. R. S., Siemaszko, A.; Weichert, D. 1995. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*, Dordrecht: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-94-011-0271-1, 396 p.

Dieter, W.; Alan, P. 2009. *Limit States of Materials and Structures*, Dordrecht: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4020-9634-1, 305 p.

Ditlevsen, O.; Madsen, H. O. 2007. *Structural Reliability Methods*, 361 p.



Domaszewski, M.; Samp-Stanisławska, E. M. 1985. Optimal shakedown design of frames by linear programming, *Computers & Structures* 21(3): 379–385. DOI: 10.1016/0045-7949(85)90114-2.

Dorosz, S.; König, J.A.; Sawczuk, A.; Biegus, A.; Kowal, Z.; Seidel, W. 1981. Deflections of elastic-plastic hyperstatic beams under cyclic loading, *Arch Mech* 33: 611–624.

Duszek, M. 1988. Problems of geometrically nonlinear theory of plasticity, 103 p.

Fadaee, M. J.; Saffari, H.; Tabatabaei, R. 2007. Mathematical Modeling for Shakedown Analysis of Offshore Structures, *American Journal of Applied Sciences* 4(7): 449–455. DOI: 10.3844/ajassp.2007.449.455.

Fadaee, M.J.; Saffari, H.; Tabatabaei, R. 2008. Shear effects in shakedown analysis of offshore structures, *Journal of Ocean University of China* 7(2): 177–183. DOI: 10.1007/s11802-008-0177-z.

Fish, J.; Belytschko, T. 2007. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley and Sons, 336 p.

Gallagher, R. H. 1975. Finite element analysis: Fundamentals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9(3): 732–732. DOI: 10.1002/nme.1620090322.

Garcea, G.; Armentano, G.; Petrolo, S.; Casciaro, R. 2005. Finite element shakedown analysis of two-dimensional structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63(8): 1174–1202. DOI: 10.1002/nme.1316.

Gerard, G. 1956. Minimum weight analysis of compression structures. New York University Press, 125 p.

Gokhfeld, D. A. 1966. Some problems of plastic shakedown of plates and shells *6th Soviet Conf. Plates and Shells*, Bakou: Moscow Izd. Nauka.

Gokhfeld, D. A., Cherniavsky O. F. 1980. *Limit analysis of structures at thermal cycling*, Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 537 p.

Gross-Weege, J. 1990. A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems, *International Journal of Plasticity* 6(4): 433–447. DOI: 10.1016/0749-6419(90)90012-4.

Groß-Weege, J. 1997. On the numerical assessment of the safety factor of elastic-plastic structures under variable loading, *International Journal of Mechanical Sciences* 39(4): 417–433. DOI: 10.1016/S0020-7403(96)00039-2.

Guralnick, S. A.; Erber, T.; Stefanis, J.; Soudan, O. 1986. Plastic Collapse, Shakedown, and Hysteresis of Multistorey Steel Structures, *Journal of Structural Engineering* 112(12): 2610–2627. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:12(2610).

Hoppe, R.; Petrova, S. 2005. On the return mapping algorithms in structural optimization of biomorphic ceramics *Proc. 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*.

- Janas, M.; Pycko, S.; Zwoliński, J. 1995. A min-max procedure for the shakedown analysis of skeletal structures, *International Journal of Mechanical Sciences* 37(6): 629–643. DOI: 10.1016/0020-7403(94)00087-Z.
- Jankovski, V.; Atkočiūnas, J. 2011. Biparametric shakedown design of steel frame structures, *Mechanika* 17(1): 5–12.
- Jankovski, V.; Atkočiūnas, J. 2008. MATLAB implementation in direct probability design of optimal steel trusses, *Mechanika* 6(74): 30–37.
- Jankovski, V.; Atkočiūnas, J. 2010. Saosys toolbox as Matlab implementation in the elastic-plastic analysis and optimal design of steel frame structures, *Journal of Civil Engineering and Management* 16(1): 103–121. DOI: 10.3846/jcem.2010.10.
- Tritsch, J.-B. 1993. *Analyse d'adaptation des structures élasto-plastiques avec prises en compte des effets géométriques* (Shakedown analysis of elasto-plastic structures accounting for geometrical effects). Phd thesis. Université des sciences et technologies de Lille.
- Kačianauskas, R.; Čyras, A. 1988. The integral yield criterion of finite elements and its application to limit analysis and optimization problems of thin-walled elastic-plastic structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67(2): 131–147. DOI: 10.1016/0045-7825(88)90121-1.
- Kala, Z.; Kala, J. 2003. The statistical correlation of material characteristics - experimental and theoretical results of hot- rolled steel beam, *Metal Structures - Design, Fabrication, Economy*: 23–26.
- Kalanta, S. 1995. The equilibrium finite elements in computation of elastic structures, *Statyba* 1(1): 25–47. DOI: 10.1080/13921525.1995.10531500.
- Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Venskus, A. 2009. Discrete optimization problems of the steel bar structures, *Engineering Structures* 31(6): 1298–1304. DOI: 10.1016/j.engstruct.2009.01.004.
- Kaliszky, S.; Lógó, J. 1997. Optimal plastic limit and shake-down design of bar structures with constraints on plastic deformation, *Engineering Structures* 19(1): 19–27. DOI: 10.1016/S0141-0296(96)00066-1.
- Kaliszky, S.; Lógó, J. 2002. Plastic behaviour and stability constraints in the shakedown analysis and optimal design of trusses, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 24(2):118–124. DOI:10.1007/s00158-002-0222-2.
- Kanno, Y.; Takewaki, I. 2007. Worst case plastic limit analysis of trusses under uncertain loads via mixed 0-1 programming, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*.
- Karadeniz, S.; Ponter, A. R. S.; Carter, K. F. 1987. The Plastic Ratcheting of Thin Cylindrical Shells Subjected to Axisymmetric Thermal and Mechanical Loading, *Journal of Pressure Vessel Technology* 109(4): 387. DOI: 10.1115/1.3264921.

Karkauskas, R.; Krutinis, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Nagevičius, J. 1995. *Statybinės mechanikos uždavinių sprendimas kompiuteriais*, Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 263 p.

Kleiber, M.; König, J. A. 1990. *Inelastic solids and structures: Antoni Sawczuk memorial volume*, Swansea UK: Pineridge Press, 558 p.

Koiter, W. T. 1956. A new general theorem on shake-down of elastic-plastic structures, *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen B* (59): 24–34.

Koiter, W. T. 1960. General theorems for elastic-plastic solids I. Sheddon & R. Hills, sud. *Progress in solid mechanics*, Amsterdam: North-Holland.

König, J.; Maier, G. 1981. Shakedown analysis of elastoplastic structures: a review of recent developments, *Nuclear Engineering and design* 66: 81–95. DOI: /10.1016/0029-5493(81)90183-7.

König, J. A. 1987. *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*. Elsevier Science Ltd. DOI: 10.1016/B978-0-444-98979-6.50018-9, 224 p.

König, J. A.; Maier, G. 1976. Adaptation of rigid-work-hardening discrete structures subjected to load and temperature cycles and second-order geometric effects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 8(1): 37–50. DOI: 10.1016/0045-7825(76)90051-7.

König, J. A.; Siemaszko, A. 1988. Strainhardening effects in shakedown processes, *Ingenieur-Archiv* 58(1): 58–66. DOI: 10.1007/BF00537200.

Krieg, R. D.; Krieg, D. B. 1977. Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model, *Journal of Pressure Vessel Technology* 99(4): 510. DOI: 10.1115/1.3454568.

Lange-Hansen, P. 1998. *Comparative Study of Upper Bound Methods for the Calculation of Residual Deformations After Shakedown*. Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer, Danmarks Tekniske Universitet, 74 p.

Leśniak, Z. 1970. *Methoden der Optimierung von Konstruktionen unter Benutzung von Rechenautomaten* (translation from Polish), Berlin: W. Ernst u. Sohn, 149 p.

Van Long, H.; Dang Hung, N. 2008. Second-order plastic-hinge analysis of 3-D steel frames including strain hardening effects, *Engineering Structures* 30(12): 3505–3512. DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.05.013.

Van Long, H.; Hung N. D. 2008. Local buckling check according to Eurocode-3 for plastic-hinge analysis of 3-D steel frames, *Engineering Structures* 30(11): 3105–3113. DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.04.002.

Van Long, H.; Hung, N. D. 2010. Plastic optimization of 3D steel frames under fixed or repeated loading: Reduction formulation, *Engineering Structures* 32(4): 1092–1099. DOI: 10.1016/j.engstruct.2009.12.035.

- Maier, G. 1970. A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, *Meccanica* 5(1): 54–66. DOI: 10.1007/BF02133524.
- Maier, G. 1972. A shakedown matrix theory allowing for work-hardening and second order geometric effects A. Sawczuk, sud. *Symp. on Foundations of Plasticity*, Warsaw.
- Maier, G. 1969. Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: A finite element, linear programming approach, *Meccanica* 4(3): 250–260. DOI: 10.1007/BF02133439.
- Maier, G.; Cohn, M. Z. 1978. *Engineering plasticity by mathematical programming*, New York, 648 p.
- Maier, G.; Comi, C.; Corigliano, A.; Perego, U. 1995. Bounds and estimates on inelastic deformations: a study of their practical usefulness Report No. EUR 16555 EN. European Commission, Nuclear Science and Technology, 286 p.
- Maier, G.; Munro, J. 1982. Mathematical programming applications to engineering plastic analysis, *Applied Mechanics Reviews* 35(12): 1631–1643.
- Maier, G.; Pan, L.; Perego, U. 1993. Geometric effects on shakedown and ratchetting of axisymmetric cylindrical shells subjected to variable thermal loading, *Engineering Structures* 15(6): 453–465. DOI: 10.1016/0141-0296(93)90063-A.
- Malena, M.; Casciaro, R. 2008. Finite element shakedown analysis of reinforced concrete 3D frames, *Computers & Structures* 86(11-12): 1176–1188. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.12.001.
- Melan, E. 1936. Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustoff, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien IIa* (145): 195–218.
- Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2003. Incremental method for unloading phenomenon fixation at shakedown., *Journal of Civil Engineering and Management* IX(3): 178–191.
- Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2005. Minimum volume of trusses at shakedown-mathematical models and new solution algorithms, *Mechanika* 2(52): 47–54.
- Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2006. Optimal shakedown design of metal structures under stiffness and stability constraints, *Journal of Constructional Steel Research* 62(12): 1270–1275. DOI: 10.1016/j.jcsr.2006.04.020.
- Merkevičiūtė, D.; Rimkus, L.; Atkočiūnas, J. 2003. Prisitaikančių konstrukcijų analizės uždavinių dualios formuluotės, jų taikymo ribos, *Journal of Civil Engineering and Management* IX(2): 91–99.
- Milošević, B.; Mijalković, M.; Petrović, Ž.; Hadžimujović, M. 2011. Comparative analysis of limit bearing capacity of a continuous beam applying the limit and shakedown analysis depending on the character of the load, *Tehnicki vjesnik* 18(4): 485–495.
- Moskvitin, V. V. 1960. *O prispособlyaemosti uprugoplasticheskikh sistem.* (On shakedown of elastic-plastic systems), *Izv. Akad. Nauk SSSR*, OTN 5: 101–107.

- Mróz, Z. 1960. On the problem of minimum weight design. Brown University, 165 p.
- Mróz, Z.; Weichert, D.; Dorosz, S. 1995. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*, Dordrecht: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-94-011-0271-1, 396 p.
- Neal, B. G. 1950. Plastic Collapse and Shakedown Theorems for Structures of Strain-Hardening Material, *Journal of the Aeronautical Sciences* (Institute of the Aeronautical Sciences) 17(5): 297–306. DOI: 10.2514/8.1621.
- Nguyen, A. D.; Hachemi, A.; Weichert, D. 2008. Application of the interior-point method to shakedown analysis of pavements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*: 414–439. DOI: 10.1002/nme.
- Nguyen, D. H. 1983. *Une methode automatique du calcul de déplacement elasto-plastique juste avant la ruine*, *Construction Metallique* 1(1983): 27–36.
- Nguyen, Dang Hung; König, J. A. 1976. A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 8(2): 179–192. DOI: 10.1016/0045-7825(76)90043-8.
- Ortiz, M.; Simo, J. C. 1986. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23(3): 353–366. DOI: 10.1002/nme.1620230303.
- Palizzolo, L. 2004. Optimization of continuous elastic perfectly plastic beams, *Computers & Structures* 82(4–5): 397–411. DOI: 10.1016/j.compstruc.2003.10.015.
- Palizzolo, L.; Caffarelli, A.; Tabbuso, P. 2014. Minimum volume design of structures with constraints on ductility and stability, *Engineering Structures* 68: 47–56. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.02.025.
- Papadrakakis, M.; Papadopoulos, V. 1995. A computationally efficient method for the limit elasto plastic analysis of space frames, *Computational Mechanics* 16(2): 132–141. DOI: 10.1007/BF00365867.
- Pycko, S. 1997. A cycle-oriented incremental analysis of shakedown problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40(17): 3163–3179. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19970915)40:17.
- Pycko, S. 1995. An Indirect Incremental Method for Shakedown Analysis Based on the Min-Max Approach, *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*, 381–398. DOI: 10.1007/978-94-011-0271-1\_21.
- Pochtman, Y. M.; Piatigorskii, Z. I. 1978. *Raschot i optimalnoe proektirovanie konstruktsiy s uchotom prisosobiaemosti*, Moskva: Nauka, 208 p.
- Ponter, A. R. S. 1972. An Upper Bound on the Small Displacements of Elastic, Perfectly Plastic Structures, *Journal of Applied Mechanics* 39(4): 959. DOI: 10.1115/1.3422898.

Ponter, A. R. S.; Carter, K. F. 1997. Shakedown state simulation techniques based on linear elastic solutions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 140(3-4): 259–279. DOI: 10.1016/S0045-7825(96)01105-X.

Ponter, A. R. S.; Engelhardt, M. 2000. Shakedown limits for a general yield condition: implementation and application for a Von Mises yield condition, *European Journal of Mechanics - A/Solids* 19(3): 423–445. DOI: 10.1016/S0997-7538(00)00171-6.

Raad, L.; Weichert, D. 1995. Stability of Pavement Structures Under Long Term Repeated Loading Z. Mroz, D. Weichert, & S. Dorosz, sud. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*. Springer Netherlands.

Rao, S. S. 2011. *The Finite Element Method in Engineering*. Butterworth-Heinemann, 688 p.

Rozenblum, W. I. 1958. On Shakedown Theory of Elastic-Plastic Bodies, *Izv. AN SSSR, OTN* 6.

Rzhanitsyn, A. R. 1954. *Analysis of Structures Taking into Account Plastic Properties of Materials* (in Russian), Moscow: Stroizdad, 126 p.

Sawczuk, A. 1974. Shakedown analysis of elastic-plastic structures, *Nuclear Engineering and Design* 28(1): 121–136. DOI: 10.1016/0029-5493(74)90091-0.

Sawczuk, A.; Mróz, Z. sud. 1975. Optimization in Structural Design, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-80895-1, 277 p.

De Saxcé, G.; Hung, N. D. 1992. Limit and shakedown minimum weight design of the plane steel frames C. Hirsch, O. C. Zienkiewicz, & E. Onate, *Numerical Methods in Engineering* '92. Elsevier.

De Saxcé, G.; Oueslati, A.; Charkaluk, E.; Tritsch, J.-B. 2013. *Limit State of Materials and Structures*, Dordrecht: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-94-007-5425-6, 218 p.

Sharp, R. W.; Booker, J. R. 1984. Shakedown of Pavements Under Moving Surface Loads, *Journal of Transportation Engineering* 110(1): 1–14. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-947X(1984)110:1(1).

Siemaszko, A. 1995. *Limit, Shakedown, Post-Yield, and Inadaptation Analyses of Discrete Plastic Structures*, Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads. Kluwer Academic Publishers. DOI: 10.1007/978-94-011-0271-1\_15.

Siemaszko, A.; König, J. A. 1985. Analysis of Stability of Incremental Collapse of Skeletal Structures, *Journal of Structural Mechanics* 13(3-4): 301–321. DOI: 10.1080/03601218508907503.

Simo, J. C. 1992. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 99(1): 61–112. DOI: 10.1016/0045-7825(92)90123-2.

Simo, J. C.; Ortiz, M. 1985. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49(2): 221–245. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90061-1.

Simo, J. C.; Taylor, R. L. 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 48(1): 101–118. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90070-2.

Simon, J.-W. 2013. Direct evaluation of the limit states of engineering structures exhibiting limited, nonlinear kinematical hardening, *International Journal of Plasticity* 42: 141–167. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.10.008.

Symonds, P. S. 1951. Shakedown in Continuous Media, *Journal of Applied Mechanics* (17): 85–89.

Symonds, P. S.; Prager, W. 1950. Elastic-plastic analysis of structures subjected to loads varying arbitrarily between prescribed limits, *Appl. Mech.* 17: 315–324.

Skaržauskas, V.; Merkevičiūtė, D.; Atkočiūnas, J. 2005. Optimisation des portiques dans les conditions d'adaptation avec des restrictions en déplacements, *Revue Européenne de Génie Civil* 9(4): 435–453. DOI: 10.1080/17747120.2005.9692764.

Skordeli, M.; Bisbos, C. D. 2010. Limit and shakedown analysis of 3D steel frames via approximate ellipsoidal yield surfaces, *Engineering Structures* 32(6): 1556–1567. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.02.004.

Spiliopoulos, K. V. 1999. A fully automatic force method for the optimal shakedown design of frames, *Computational Mechanics* 23(4): 299–307. DOI: 10.1007/s004660050411.

Spiliopoulos, K.; Weichert, D. 2014. Direct Methods for Limit States in Structures and Materials, Dordrecht: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-94-007-6827-7, 278 p.

Staat, M.; Heitzer, M. 2003. Publication Series of the John von Neumann Institute for Computing (NIC) NIC Series Volume 15, 305 p.

Standard E. 2005. EN 1993-1-1, Design of steel structures Part 1-1: General rules and rules for buildings.

Stein, E.; Zhang, G.; König, J. 1992. Shakedown with nonlinear strain-hardening including structural computation using finite element method, *International Journal of Plasticity* 8(1): 1–31. DOI: 10.1016/0749-6419(92)90036-C.

Stein, E.; Zhang, G.; Mahnken, R. 1993. Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials CISM. *Progress in Computational Analysis or Inelastic Structures*, Wien, New York: Springer Verlag.

Tin-Loi, F. 2000. Optimum shakedown design under residual displacement constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 19(2): 130–139. DOI: 10.1007/s001580050093.

Tritsch, J.-B.; Weichert, D. 1995. Case Studies on the Influence of Geometric Effects on the Shakedown of Structures, *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*. Springer Netherlands.

Wang, J.; Yu, H.-S. 2013. Shakedown analysis for design of flexible pavements under moving loads, *Road Materials and Pavement Design* 14(3): 703–722. DOI: 10.1080/14680629.2013.814318.

Weichert, D. 1986. On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures, *International Journal of Plasticity* 2(2): 135–148. DOI: 10.1016/0749-6419(86)90009-4.

Weichert, D.; Hachemi, A. 1998. Influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of damaged structures, *International Journal of Plasticity* 14(9): 891–907. DOI: 10.1016/S0749-6419(98)00035-7.

Weichert, D.; Maier, G. 2000. *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads*, Dordrecht: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-94-010-9421-4.

Weichert, D.; Maier, G. 2002. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads*, Vienna: Springer Vienna. DOI: 10.1007/978-3-7091-2558-8.

Weichert, D.; Ponter, A. R. S. 2009. *Limit States of Materials and Structures*, Dordrecht: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4020-9634-1.

Zhang, Y.-G. 1995. An iteration algorithm for kinematic shakedown analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 127(1-4): 217–226. DOI: 10.1016/0045-7825(95)00121-6.

Zienkiewicz, O. C. 2001. Displacement and equilibrium models in the finite element method by B. Fraeijs de Veubeke, Chapter 9, Pages 145–197 of Stress Analysis, Edited by O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Published by John Wiley & Sons, 1965, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52(3): 287–342. DOI: 10.1002/nme.339.



---

# Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

## Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Atkočiūnas, J.; Ulitinas, T.; Kalanta, S.; Blaževičius G. 2015. An extended shakedown theory on an elastic–plastic spherical shell, *Engineering Structures* 101: 352–363. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.07.021 (ISI Web of Science).

Blaževičius, G.; Atkočiūnas, J. 2015. Optimal shakedown design of steel framed structures according to standards, *Annals of Solid and Structural Mechanics*. DOI: 10.1007/s12356-015-0039-5.

Blaževičius, G.; Rimkus, L.; Atkočiūnas, J. 2014. An improved method for optimal shakedown design of circular plates, *Mechanika* 20(4): 390–394. DOI: 10.5755/j01.mech.20.4.6542 (ISI Web of Science).

Blaževičius G.; Atkočiūnas, J. 2014. Eurocode stability requirements in optimal shakedown truss design, *Engineering Structures and Technologies* 6(1): 18–24. DOI: 10.3846/2029882X.2014.957901.

Blaževičius, G.; Šalna, R. 2013. Probability-based design of an optimal elastic-plastic truss, *Engineering Structures and Technologies* 5(1): 37–43. DOI: 10.3846/2029882X.2013.781803.

### **Straipsniai kituose leidiniuose**

Blaževičius, G.; Atkočiūnas, J. 2015. Optimal shakedown design of circular plates using a yield criterion of the mean *Mechanika'2015: proceedings of the 20th international scientific conference*, Kaunas, Lithuania. ISSN 1822-2951 p. 61-66.

Atkočiūnas, J.; Blaževičius, G. 2012. Eurocode Stability Requirements in Optimal Shakedown Truss Design B. H. V. Topping, sud. *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology*: 1–11. DOI: 10.4203/ccp.99.268.

Blaževičius, G.; Atkočiūnas, J. 2011. Prisitaikančių santvarų tūrio minimizavimas inkrementiniu metodu, *Mokslas – Lietuvos ateitis*: 1–6, ISSN 2029-7149.

---

# Summary in English

## Problem formulation

Shakedown theory, which was fundamentally formulated in the middle of the 20<sup>th</sup> century and has very wide theoretical application, is still not implemented in the practical structural design of steel structures. The fact that some solutions of the theory are standardised and successfully integrated in other fields of mechanics suggests its potentiality in structural mechanics as well. In order to achieve this goal, generalised theoretical solutions of shakedown theory should be more closely related and combined with the basis of modern standardised structural design involving Eurocode. Shakedown theory allows for effective design of lightweight steel structures subjected to variable repeated loads. Optimisation in the state of shakedown creates opportunities to find economically optimal design projects and reduce their cost. All above aspects have to be taken into account for creation of new design methodologies, which are not sufficiently developed at present day.

## Relevance of the thesis

Application of shakedown-based design methods has been restricted for a long time due to limitations of personal computer technologies. Now, with the growth of nonlinear optimization problem solution speed, engineers acquire a capability to apply optimization based methods in practical design. Therefore it is necessary to create new design

methodologies satisfying the increasing speed of design and realization of architecturally complex structures. The goal is to extend the optimal shakedown design methodologies to practical application purposes, which would allow designing more economical building structures.

## **Research object**

The object of the research is modern shakedown theory and its integration with the requirements of contemporary design standards of steel structures.

## **Aim of the thesis**

The aim of the thesis is to create new methods of the shakedown theory for the optimization of steel structures including Eurocode ultimate and serviceability limit state requirements.

## **Objectives of the thesis**

In order to achieve the aim of the thesis, the following objectives have been set:

1. To analyse existing shakedown optimization mathematical model formulations and to identify their drawbacks and advantages.
2. To integrate steel design standard requirements into optimization problems relating them to the actual physical behaviour of structural elements.
3. To combine different Eurocode reliability requirements for the ultimate and serviceability limit states in one optimization problem.
4. To implement elemental stability requirements in the optimization problem and adequately define their influence on plastic structure behaviour.
5. To numerically test and evaluate efficiency of newly created methodologies.

## **Research methodology**

The research is based on the integration of methods of plasticity theory, mathematical programming and optimization. The thesis develops new methods on the realization of practical structural design requirements using three abovementioned disciplines. Mathematical algorithms are closely related to the actual physical structural behaviour and to the empirically based design standard requirements. Scientific investigation starts with the analysis of classical mathematical formulations of shakedown which are further complemented with contemporary design standard requirements.

## Scientific novelty of research findings

Eurocode strength, stiffness, displacement constraints and complementary conditions for plastic deformations are conjoined in one optimal shakedown design problem formulation for the first time. A new, more precise practical application of the shakedown theory for steel structural design is created. Presented methodologies allow finding optimal solution of the structural project in one step, avoiding exhausting iterative analysis. Carefully selected optimality criteria makes design more cost efficient and thus reduces its impact on the environment and helps develop sustainable structures.

## Practical value of research findings

Presented methodologies demonstrate possibilities for applying shakedown solutions in practical tasks of optimal steel design. Further development and application of such techniques for large scale problems would increase design speed, reduce the cost of materials and thus the cost of structures. The thesis presents problem formulations and actual Matlab programming codes, which can be readily used in analysis, verification and design of building structures.

## Defended statements

1. Classical shakedown theory can be extended and successfully adapted for optimal design problems.
2. Modern design standard requirements can be integrated into the optimal shakedown design problem formulation.
3. Structural optimisation based on the shakedown theory allows finding the most economical structural design.
4. Presented methods of optimal shakedown design efficiently evaluate the effects of various variable repeated loads.

## Approval of research findings

The author published 8 scientific papers concerning thesis research topics: 2 publications in journals indexed in „ISI Web of Science“ with impact factors, 3 publications in international periodic journals, 3 in other reviewed journals (proceedings). For the full list of publications, see page 123. Research results were approved in 7 scientific conferences:

- International conference „Mechanika-2015“, 2015. Kaunas, Lithuania.
- International conference-colloquium „EUROMECH - Colloquium 548, Direct and variational methods for nonsmooth problems in mechanics“, 2013. Amboise, France;

- „Eleventh International Conference on Computational Structures Technology“, 2012. Dubrovnik, Croatia;
- „Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos seminaras“, 2012. Vilnius;
- Junior research conferences „Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencija“, 2011, 2012 and 2013. Vilnius;

## Structure of the thesis

The thesis consists of the introduction, four chapters and general conclusions. Additionally, there are five annexes included in the CD. The entire work takes 136 pages without annexes, 36 figures, and 11 data tables and 202 numbered equations. It cites 166 scientific articles.

### 1. Shakedown analysis under multidimensional loading: history and state of the art

Building structures are subjected to fixed and variable repeated (cyclic) loading. Variable repeated loading  $\mathbf{F}(t)$  is defined by the system of forces and effects independently varying in time  $t$ . It is assumed that multidimensional loading is quasi-static, i.e. dynamic effects are ignored. The maximum number of components in the vector  $\mathbf{F}(t) = [F_1(t) \ F_2(t) \ \dots \ F_m(t)]^T$  is equal to the degree of freedom of a discrete structure –  $m$ . Actual loading history is usually unknown, thus only upper  $\mathbf{F}_{sup}$  and lower  $\mathbf{F}_{inf}$  bounds of load variation are defined:  $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$ . Load combination vectors  $\mathbf{F}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ;  $p = 2^m$ ,  $j \in J$  ( $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}_j \leq \mathbf{F}_{sup}$ ) are formed according to the defined bounds. Fig. 1.1 illustrates a rectangular loading domain and its four apexes, defining load combinations. Particular loading histories, e.g.  $\mathbf{F}_I(t)$ ,  $\mathbf{F}_{II}(t)$  are not investigated (it can be done by applying an incremental analysis, which is described in section 1.4 of the thesis). Application of load combinations  $\mathbf{F}_j$  allows determining ultimate limit state of the structure in the case of cyclic loads without a detailed analysis of loading history. This thesis analyses and extends computational theory of elastic-plastic steel structures (under the assumption of associative plastic flow rule) for all response states: elastic, elastic-plastic (shakedown) and limit (collapse) state. Assumption of small displacements  $\mathbf{u}$  is strictly followed, i.e. elastic  $\boldsymbol{\theta}_e = \mathbf{D}\mathbf{S}_e$  and total elastic and plastic deformations  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{D}\mathbf{S} + \boldsymbol{\theta}_p$  are relatively small ( $\mathbf{D}$  is flexibility matrix). Therefore geometric equations of the discrete structural model are  $\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{S} + \boldsymbol{\theta}_p$ , equilibrium equations are  $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{F}$ ; where  $\mathbf{S}_e$  is vector of elastic internal forces and  $\boldsymbol{\theta}_p$  is vector of plastic deformations. It has to be mentioned that perfectly elastic plastic structural model is neither ideal nor unique in the analysis of the plasticity theory when variable repeated

loads are considered, especially taking into account the variety of materials. But there are two reasons which justify this choice. First, perfectly elastic plastic theory is relatively simple, but allows modelling residual deformations by ignoring complex phenomena such as Bauschinger effect or material hardening. Second, in many practically important cases this model describes structural behaviour with sufficient accuracy (especially within extreme load variation ranges, which are the subject of the shakedown theory).

## 2. Extended shakedown theory on discretised structures

A mathematical model of the continuous optimization problem is created by analysing the complete system of equations describing the structure at shakedown (2.26). A scalar function of the limiting forces is chosen as an optimality criterion:  $\min \omega(\mathbf{S}_0)$  (Čyras, Atkočiūnas 1970; Čyras *et al.* 1974). The problem of determination of the optimal limiting force distribution is relevant for practical design, namely when function  $\omega$  defines cost or similar economic parameter of a structure.

Optimization problem is formulated as follows: *for the given load variation bounds  $\mathbf{F}_{inf}$ ,  $\mathbf{F}_{sup}$ , a vector of limiting internal forces  $\mathbf{S}_0$ , satisfying optimality criterion  $\min \omega(\mathbf{S}_0)$  and the constraints of shakedown and displacements, has to be found.*

$$\min \omega(\mathbf{S}_0), \quad (\text{S2.1})$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (\text{S2.2})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \geq \mathbf{0}, \quad (\text{S2.3})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{S}_0) \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p(\mathbf{S}_0) - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (\text{S2.4})$$

$$\boldsymbol{\theta}_p(\mathbf{S}_0) = \sum_j \left[ \nabla \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \right]^T \boldsymbol{\lambda}_j, \quad (\text{S2.5})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \left[ \mathbf{C}(\mathbf{S}_0) - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{S}_r) \right] = 0, \quad (\text{S2.6})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_j = [\lambda_{1j} \ \lambda_{2j} \ \dots \ \lambda_{\zeta_j j}]^T, \quad (\text{S2.7})$$

$$\mathbf{S}_0 \geq \mathbf{S}_{0,\min}, \quad (\text{S2.8})$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{ej}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (\text{S2.9})$$

$$\mathbf{S}_{ej} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{S}_0) \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{ej} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{S}_0) \mathbf{F}_j, \quad \forall j \in J. \quad (\text{S2.10})$$

Unknowns of the problem are  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_r$ ,  $\mathbf{u}_r$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_j$ . This optimisation problem is non-convex due to mathematical programming slackness conditions (S2.6), (S2.7). It is

indicated which variables depend on limiting forces  $\mathbf{S}_0$ . Residual forces  $\mathbf{S}_r$  indirectly depend on the  $\mathbf{S}_0$  – their determination is basically another, integrated problem, as it is demonstrated in the formulation (1.51)–(1.58). Since the constraints depend on the unknowns (flexibility matrix  $\mathbf{D}$  depends on the cross section parameters, thus on the  $\mathbf{S}_0$ ), the problem is usually solved in an iterative manner (Atkočiūnas, Blaževičius 2012). Permissible bounds of the displacement variation  $\mathbf{u}_{\min}$ ,  $\mathbf{u}_{\max}$  used in the equations (S2.9) are determined according to design standards (Blaževičius and Atkočiūnas, 2014). The formulation of the problem (S2.1)–(S2.10) is introduced and numerically implemented for the first time in this thesis. Up to now, optimal shakedown design problems with displacement constraints were solved divided in several steps (for comparison see formulation (1.51)–(1.58)). The author of the thesis applied new optimization and mathematical programming techniques in Matlab software for integrated solution of this problem which may even include nonlinear yield conditions (it is demonstrated with a numerical example of plate optimisation in chapter 4). It may be stated that modern mathematical software allows solving such complex optimisation problems in personal computers.

In the case of linear yield conditions, the problem (S2.1)–(S2.10) can be simplified. If yield conditions are written as follows:

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (\text{S2.11})$$

residual displacements and residual internal forces can be expressed in terms of plastic multipliers  $\boldsymbol{\lambda}$ , respectively  $\mathbf{u}_r = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}$  and  $\mathbf{S}_r = \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda}$ . Influence matrices of residual displacements and internal forces depend on equilibrium and flexibility matrices only:

$$\mathbf{H} = \left( \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{G} = \left( \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{H} - \mathbf{D}^{-1} \right) \boldsymbol{\Phi}. \quad (\text{S2.12})$$

The most convenient starting point for the analysis of element stability (buckling) is the elements of trusses subjected to uniaxial stress state. Strength conditions for these elements, taking into account only the axial force  $N$ , are written as follows:

$$\text{for tension} \quad \boldsymbol{\varphi}_{\max} = N_0 - \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} - N_{e,\max} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{S2.13})$$

$$\text{for compression} \quad \boldsymbol{\varphi}_{\min} = N_{0,cr} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + N_{e,\min} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{S2.14})$$

Limiting compression axial force  $N_{0,cr}$  is determined by valid design standards. This force defines the buckling resistance of a particular element (bar) and depends on slenderness, boundary conditions etc. Limiting axial compression force cannot exceed limiting tension force  $N_0$ , which is usually determined considering only cross sectional area  $A$  and steel yield stress  $f_y$ :  $N_{0,cr} \leq N_0 = f_y \cdot A$ .

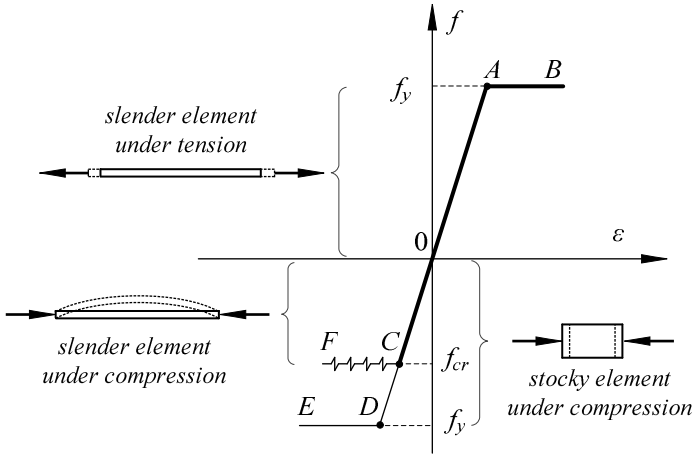
Mathematical model of optimization includes the Kuhn-Tucker conditions (and mathematical slackness conditions (2.72) among them) (Tin-Loi 2000). When separate



strength conditions are applied for tension and compression, plastic multipliers associated with these conditions have to be separated as well:  $\lambda = [\lambda_{\max}, \lambda_{\text{cr}}]^T \geq 0$ ,

$$\lambda_{\max}^T \phi_{\max} = 0, \quad \lambda_{\text{cr}}^T \phi_{\min} = 0. \quad (\text{S2.15})$$

Under the associative plastic flow rule, these multipliers are directly related to the plastic deformations emerging at the particular cross sections. The stress-strain state of the elastic-plastic structures is defined in this thesis by the so called Prandtl diagram (Fig. S1). This diagram is further used for the analysis of element buckling in the plastic state.



**Fig. S1.** Stress-strain graph of perfectly elastic-plastic material

If stability verification is implemented in the mathematical programming problem, it is found that, in general, deformations emerge according to the curve 0-C-F. However, contrary to the case of tension, plastic deformations of the elements under compression (when the limit state is reached, i.e. after the loss of stability) are not defined in the EC and cannot be evaluated. Therefore, a true deformation curve of the element under compression is only elastic – 0-C, if  $C \neq D$ , or elastic-plastic – 0-D-E, when  $D = C$ . Thus, the solution algorithm of the mathematical programming problem comes into conflict with the Eurocode requirements and the above-mentioned complementary slackness conditions are inadequate for ensuring the shakedown of a truss.

This inaccuracy is eliminated by introducing a new condition in the mathematical model, which ensures that plastic multipliers (i.e. plastic deformations) can emerge only due to the limit stress of the elements under tension or in very stocky elements (small non-dimensional slenderness) under compression:

$$\lambda_{\text{cr},k} (N_{0,k} - N_{0,\text{cr},k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad k \in K. \quad (\text{S2.16})$$

This condition ensures that slender elements under compression cannot cause the occurrence of nonzero plastic multipliers. The correct determination of the plastic multipliers  $\lambda$  is an essential task because they are used in the same problem for calculating the residual forces and displacements. This new condition makes an essential difference in the optimization algorithm compared to the previous researches (Atkočiūnas and Venskus 2011; Kaliszky, Lógó 2002; Merkevičiūtė, Atkočiūnas 2006).

More complex strength (yield) conditions are applied for the elements under axial and bending internal forces, compared to only axially loaded truss elements. Many yield conditions for frame elements have been created over the years and they assess many geometric as well as physical parameters: form of cross section, type of manufacturing etc. (Skordeli, Bisbos 2010). Piecewise linear yield conditions are usually applied for the standard steel profiles as it was described in chapter 1.4.3 and shown in fig. 1.8.

The stress state of an element design section  $i$  is fully described by the vectors of residual and elastic forces  $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{ri} + \mathbf{S}_{ei,j}$ ,  $\mathbf{S}_{i,j} = \begin{bmatrix} M_{ri} + M_{ei,j} \\ N_{ri} + N_{ei,j} \end{bmatrix}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ .

Then, linear yield conditions can be expressed using the matrixes of yield coefficients and of configuration:

$$\boldsymbol{\Phi}_{i,st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Pi}_{i,st} = \begin{bmatrix} \frac{1-n_i}{1-0.5a_{w,i}} \\ \frac{1-n_i}{1-0.5a_{w,i}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{i,cr} = \begin{bmatrix} k_{yy,i} & -\frac{c_i}{\chi_i} \\ -k_{yy,i} & -\frac{c_i}{\chi_i} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Pi}_{i,cr} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{S2.17})$$

These matrices are directly used in the linear formulation of optimal shakedown design problem (2.70)–(2.74). For all frame design sections  $i \in I$  and for every load domain apex  $j$  strength and stability conditions are formulated as follows:

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,st} = \boldsymbol{\Pi}_{st} \mathbf{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}_{st} (\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J. \quad (\text{S2.18})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,cr} = \boldsymbol{\Pi}_{cr} \mathbf{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}_{cr} (\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J. \quad (\text{S2.19})$$

In the Eurocode standards, all design calculations are divided into two groups and are aimed at verifying the ultimate and serviceability limit states. Two different reliability levels are used for these limit states. In partial factor method, these levels are achieved by applying the respective representative values of the action. The abovementioned yield conditions belong to the ultimate limit state, and therefore design values (with a respective partial factor) of loading should be applied in calculating internal forces. Serviceability limit state for the structure must be secured as well; therefore displacement constraints must be introduced into the optimisation model (Atkočiūnas *et al.* 1981; Blaževičius, Atkočiūnas 2014; Capurso *et al.* 1978; Tin-Loi 2000).

Stiffness conditions (S2.9) belong to serviceability conditions, and thus characteristic values (smaller than design values) of loads should be applied for calculations:

$$\mathbf{u}_{\min} \leq (\mathbf{u}_r + \bar{\mathbf{u}}_{ej}) \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad j \in J. \quad (\text{S2.20})$$

where  $\mathbf{u}_{\min}$  and  $\mathbf{u}_{\max}$  are the known vectors of the upper and lower admissible bounds of displacement variation. The displacement of a perfectly elastic-plastic truss consists of two components: the residual  $\mathbf{u}_r$  and pseudo-elastic  $\bar{\mathbf{u}}_{ej}$ . The residual component is obtained from the shakedown process. Therefore, it is determined by the ultimate state with a high reliability level. The vector  $\mathbf{u}_r$  is calculated in the optimization process of a structure subjected to design values of variable repeated loading: for all possible combinations of loading  $j$ ,  $\mathbf{F}_{jd} = \gamma_E \cdot \mathbf{F}_{jk}$  (where index  $d$  means the *design value*,  $k$  is the *characteristic value* and  $\gamma_E$  is a partial factor for the action). The pseudo-elastic component is calculated using the Hooke's law and determined by the serviceability limit state with a lower reliability level  $\bar{\mathbf{u}}_{ej} = \beta \mathbf{F}_{jk}$ . This approach, based on the dual reliability level, allows for designing more economical structures compared to the earlier presented models (Atkočiūnas *et al.* 2008), because lower reliability is used for the displacement constraints than the strength and stability conditions.

### 3. Numerical experiments of bar structure optimization

The general optimization model of a discrete system (S2.1)–(S2.10) is adapted for bar structures in this chapter. Plane frame structures with elements subjected to axial force and bending moment are considered. Eurocode requirements are applied; therefore, a mathematical model of optimization is formulated considering strength, stability and stiffness (displacement constraints) conditions described in Chapter 2. Limiting bending moment is used to define element's bearing capacity.

The mathematical model for determining the optimal limiting moment distribution of the structure at shakedown according to the EC3 standard requirements reads as follows:

$$\min \sum_k L_k M_{0k}, \quad (\text{S3.1})$$

subject to

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,st} = \boldsymbol{\Pi}_{st} \mathbf{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}_{st} (\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (\text{S3.2})$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,cr} = \boldsymbol{\Pi}_{cr} \mathbf{M}_0 - \boldsymbol{\Phi}_{cr} (\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (\text{S3.3})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j,st}^T \boldsymbol{\varphi}_{st} = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,st} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{j,cr} = \mathbf{0} \quad (\boldsymbol{\lambda}_{j,cr}^T \boldsymbol{\varphi}_{cr} = 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j (\boldsymbol{\lambda}_{j,st} + \boldsymbol{\lambda}_{j,cr}), \quad (\text{S3.4})$$

$$M_{0k} \geq M_{0k,\min}, \quad k \in K, \quad (\text{S3.5})$$

$$\mathbf{u}_{\inf} \leq \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{\sup}, \quad \mathbf{u}_r = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}. \quad (\text{S3.6})$$

The influential matrices of the elastic forces, displacements, residual forces and residual displacements  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{H}$  are dependent on the moments  $\mathbf{M}_0$ ; therefore, the solution algorithm is performed in an iterative manner.

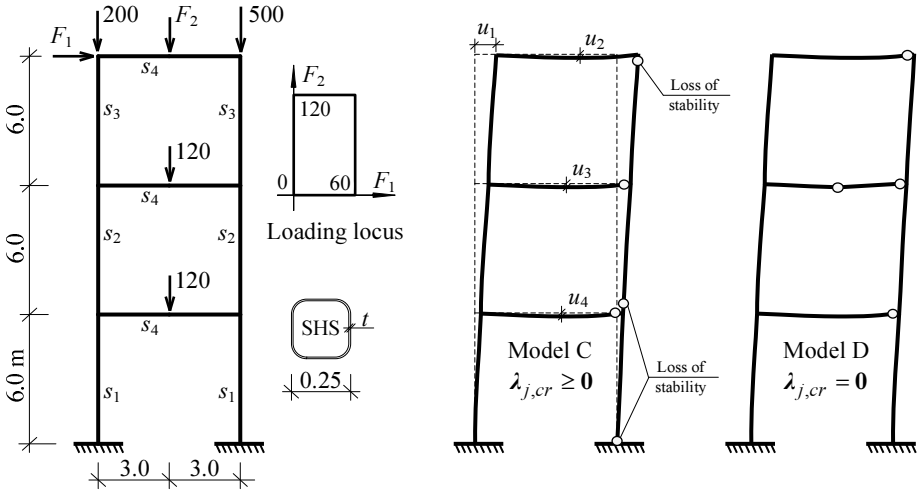
The unknowns of the problem are the limiting moments  $\mathbf{M}_0$  and the plastic multipliers  $\boldsymbol{\lambda}$ . The model consists of the strength (shakedown) conditions (S3.2), (S3.6), the complementary slackness conditions (S3.4) with a new condition for plastic multipliers of stability  $\boldsymbol{\lambda}_{j,cr} = \mathbf{0}$ , structural configuration constraints (S3.5) and the displacement constraints (S3.6). A comparison between four different models of optimization (A, B, C and D) were analysed in the thesis to investigate the changes made in the new proposed methods. All four models were applied to a benchmark problem of a portal frame. Models A and B are classical shakedown problems thus they will be omitted in the further presented numerical example of a more complex frame optimization.

An optimization problem of a three-floor plane frame (Fig. S2) is considered. The frame is subjected to four constant and two variable loads, i.e. the forces  $F_1$  and  $F_2$  (forces in kN). The partial factor for design values is  $\gamma_E = 1.3$ . The main task is to solve the problem (S3.1)–(S3.6), i.e. to determine the limiting moments  $\mathbf{M}_0$  and the respective cross sections. The elements of the frame are grouped into four groups  $s_1$ – $s_4$ . All the sections are square hollow (SHS). The elasticity modulus of the material is  $E = 210$  GPa, while the yield stress  $f_y = 235$  MPa. The prescribed minimum values of the limiting internal moments  $M_{0k,\min}$  are zero for all elements.

Two different cases of optimization problems are considered to evaluate the influence of new constraints:

- C. Shakedown with displacement and stability constraints.** This case defines the model (S3.1)–(S3.6) without the complementary conditions for plastic multipliers of stability  $\boldsymbol{\lambda}_{j,cr} = \mathbf{0}$ .
- D. Shakedown with displacement, stability constraints and the new complementary conditions for plastic multipliers.** This is the entire model (S3.1)–(S3.6) with the new complementary conditions  $\boldsymbol{\lambda}_{j,cr} = \mathbf{0}$ .

Plastic frame deformations in the particular optimization cases are illustrated in Fig. S2. The values of the objective function (S3.1) were found to be as follows: with model C – 9515.2 kN·m<sup>2</sup>, with model D – 10112.7 kN·m<sup>2</sup>.



**Fig. S2.** Frame geometry and loading. Plastic hinges in the shakedown state

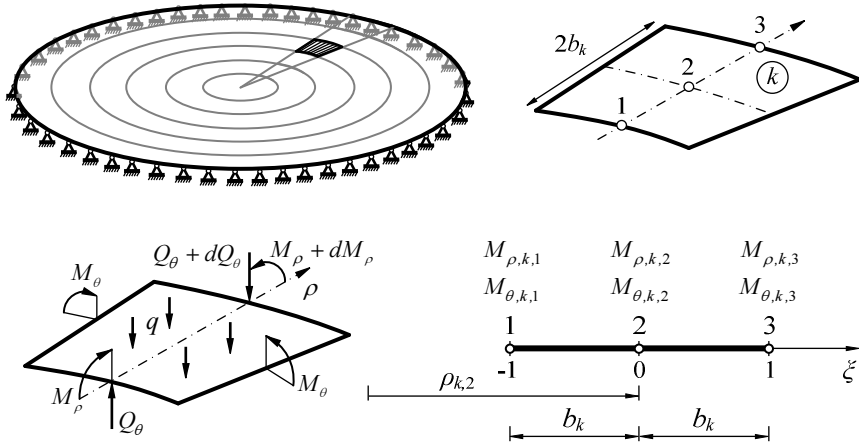
The complementary condition for plastic multipliers ( $\lambda_{j,cr} = 0$ ) in model D did not allow for the emergence of plastic deformations due to the stability conditions as it did in model C. Thus different stress state as well as the distribution of residual forces and plastic deformations was determined. Detailed optimization results can be found in the Table 3.8.

#### 4. Structural optimization with nonlinear yield criterion

Discrete model of a symmetric circular plate consists of linear elements possessing three nodes each (Fig. S3). The figure indicates positive internal force (bending moment and shear force) directions. If polar coordinate system origin coincides with the symmetry axis, only one radius of the plate can be taken into account because internal forces and displacement do not depend on the angular coordinate. The limit bending moment  $M_0$  (resistance) is assumed to be constant over the whole finite element.

In the circular symmetric plate only two bending moments, which depend on radial coordinate  $\rho$  (Fig.S4), are taken into account (radial  $M_{k,\rho}(\rho)$  and tangential  $M_{k,\theta}(\rho)$ ). Bending moments  $\mathbf{M}_k(\rho)$  at any point  $\rho$  of finite element  $k$  are expressed via stress  $\mathbf{M}_k$  of element nodal points, using approximation matrix  $\mathbf{H}_k(\rho)$ :

$$\mathbf{M}_k(\rho) = \begin{bmatrix} M_{k,\rho}(\rho) \\ M_{k,\theta}(\rho) \end{bmatrix} = \mathbf{H}_k(\rho) \cdot \mathbf{M}_k. \quad (\text{S4.1})$$



**Fig. S3.** Finite element of a circular symmetric plate and its positive internal forces.  
Relation between global and local coordinates

The problem of determining the optimal limit bending moment distribution in a circular plate at shakedown is formulated as follows:

$$\min \mathcal{F}(\mathbf{M}_0), \quad (\text{S4.2})$$

subject to

$$\mathbf{A} \mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (\text{S4.3})$$

$$\varphi_j = (\mathbf{M}_0)^2 - \Gamma(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ej})^T \Pi(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ej}) \geq 0, \quad (\text{S4.4})$$

$$\mathbf{B}_r \mathbf{S}_r = \mathbf{B}_p \boldsymbol{\theta}_p, \quad (\text{S4.5})$$

$$\boldsymbol{\theta}_p = 2 \sum_j \Pi \Gamma^T (\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{ej})^T \lambda_j, \quad (\text{S4.6})$$

$$\lambda_j^T \varphi_j = 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad (\text{S4.7})$$

$$\mathbf{M}_{0,\min} \leq \mathbf{M}_0 \leq \mathbf{M}_{0,\max}, \quad (\text{S4.8})$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{ej} + \left[ \left( \mathbf{A}^{(1)T} \right)^{-1} \left( \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{M}_r + \boldsymbol{\theta}_p^{(1)} \right) \right] \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (\text{S4.9})$$

$$\mathbf{M}_{ej} = \alpha \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{u}_{ej} = \beta \mathbf{F}_j, \quad j \in J. \quad (\text{S4.10})$$

Unknowns of the problem are  $M_0$ ,  $M_r$  and  $\lambda_j$ . The structure of the plastic deformation vector is  $\theta_p = \left[ \theta_p^{(1)} \theta_p^{(2)} \right]^T = \left[ \theta_{p1} \theta_{p2} \dots \theta_{pn} \right]^T$ .

**Numerical experiment 1.** The experiment considers a circular plate of radius  $R = 0.9$  m hinge-supported at its outer contour (Fig. S4). The plate is subjected to a symmetrically and uniformly distributed load varying in the range of  $-95 \text{ kN/m}^2 \leq q(t) \leq 100 \text{ kN/m}^2$  and constant uniformly distributed bending moment  $M = 36.25 \text{ kN}$  applied to the outer contour of the plate. The material modulus of elasticity is  $E = 210 \text{ GPa}$ , yield stress –  $\sigma_y = 210 \text{ MPa}$ , Poisson's ratio –  $\nu = 1/3$  and the initial thickness –  $t = 0.03$  m. Optimal limit bending moments of elements  $M_{0,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$  are to be found using the model (S4.2)–(S4.10). The moments directly determine the thickness of the plate  $t$ :  $M_{0,k} = \sigma_y t_k^2 / 4$ .

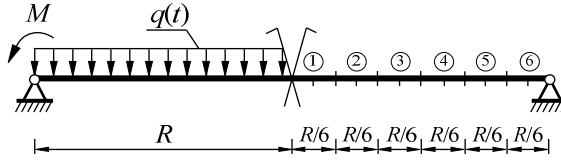


Fig. S4. Loading and discrete model of the circular plate

An admissible plate deflection in the centre is bounded to  $-0.03 \text{ m} \leq u_{r,1} + u_{ej,1} \leq 0.03 \text{ m}$ . The results of optimization are presented in Table 4.1. The optimal thicknesses of the plate are indicated in the last row of the table. The optimal solution is achieved when the problem converges (Fig. S5).

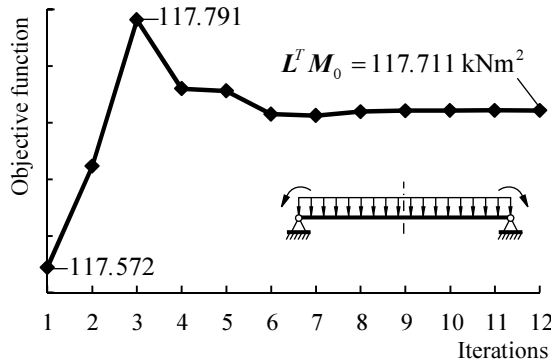


Fig. S5. The convergence of the objective function

Optimization of circular plates using von Mises yield criterion of the mean is further analysed. Yield conditions for whole structure are as follows:

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{M}_0 - \mathbf{f}_j (\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{e,j}) \geq \mathbf{0}, \quad j \in J. \quad (\text{S4.11})$$

Von Mises yield condition of a section of a circular plate in matrix form reads:

$$\mathbf{M}_k^T [\mathbf{H}_k(\rho)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\rho)] \mathbf{M}_k \leq (M_{0,k})^2, \quad \text{where } \boldsymbol{\Pi}_k = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{S4.12})$$

Integrating both sides of the equation (S4.12) over the width of an element  $L_k = 2b_k$ , gives the yield condition of the mean (or integral yield condition). Changing the coordinate from local to global as previously stated, leads to:

$$\mathbf{M}_k^T \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\mathbf{H}_k(\xi)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\xi)] d\xi \right\} \mathbf{M}_k \leq (M_{0,k})^2. \quad (\text{S4.13})$$

Introducing yield matrix  $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\mathbf{H}_k(\xi)]^T \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{H}_k(\xi)] d\xi$ , equation (S4.13)

becomes  $\mathbf{M}_k^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{M}_k \leq (M_{0,k})^2$ , where:

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0.25 \\ -1 & 2 & -0.5 & 1 & 0.25 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & 8 & -4 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -4 & 8 & -0.5 & 1 \\ -0.5 & 0.25 & 1 & -0.5 & 2 & -1 \\ 0.25 & -0.5 & -0.5 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{S4.14})$$

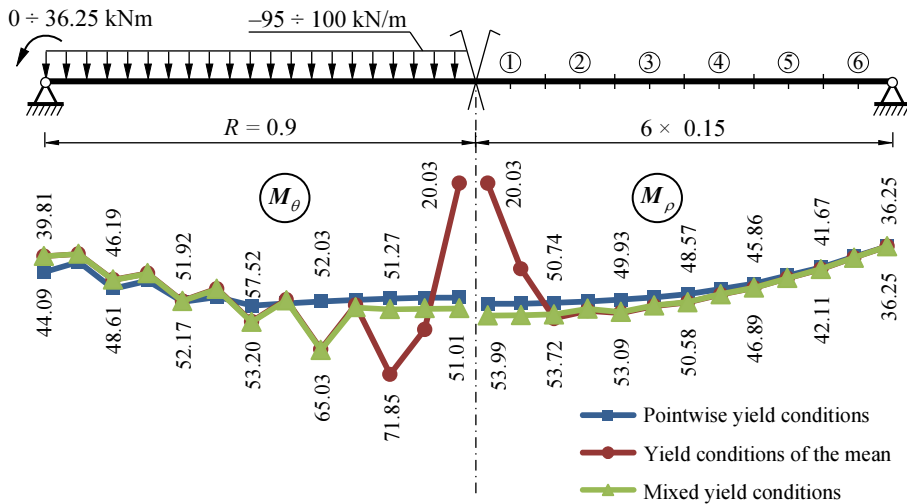
The matrix (S4.14) was introduced by Čyras and Kalanta (Čyras, Kalanta 1977) but, in the author's knowledge, was never applied to shakedown problems. This matrix reduces the number of yield conditions: one condition is written for the entire element instead of three pointwise conditions (Kačianauskas, Čyras 1988; Nguyen Dang Hung, König 1976). Therefore mathematical programming problem is reduced as well, which is particularly relevant in practical optimization of structures subjected to multiple variable repeated loads.

**Numerical experiment 2.** Circular plate is subjected to a symmetrically and uniformly distributed load varying in the range of  $-95 \text{ kN/m}^2 \leq q(t) \leq 100 \text{ kN/m}^2$  and concentrated moment on the outer edge varying in the range of  $0 \leq M(t) \leq 36.25 \text{ kN/m}$  (Fig. S6). Modulus of elasticity is  $E = 210 \text{ GPa}$ , yield stress  $\sigma_y = 210 \text{ MPa}$ , Poisson's ratio  $\nu = 1/3$ . Optimal limit bending moments are to be found. In this case plate



displacements are unbounded; therefore the model (S4.2)–(S4.10) defines cyclic plastic collapse. Three optimization problems are solved for a comparison:

- using pointwise Von Mises yield conditions;
- using yield conditions of the mean;
- using mixed yield conditions (pointwise for the first finite element only) .



**Fig. S6.** Discrete model of the circular plate. Bending moment diagrams in kNm

If yield conditions of the mean are applied some difficulties arise in the assessment of internal forces at the symmetry point (Fig. S6). In this case mixed yield conditions show significantly better results. Having in mind that elastic internal forces are calculated in all three nodes of the elements, mixed yield conditions do not complicate problem formulation.

## General conclusions

1. The duality of Melan and Koiter theorems is demonstrated for the cyclic plastic collapse state. Using mathematical programming theory it has been proven that for the pre-collapse state it becomes the classical Koiter theorem statement.
2. The thesis proves that in the case when load variation bounds are known, shakedown state is achieved due to unique residual force distribution (new conclusion for the Melan theorem).
3. The thesis develops general theoretical as well as particular practical formulations of optimal shakedown design problems of trusses, frames and plates

were developed in the thesis (formulations are based on extreme energy principles, finite element method and mathematical programming). Developed methods can be successfully applied in the creation of more economical design compared to the common practice.

4. An optimality criterion together with the Euler-Lagrange equations becomes the basis for the mathematical model for the optimal shakedown design problem. A kinematic formulation of the shakedown analysis problem proves that a mathematical model of the optimization problem is valid for a holonomic process of plastic deformations. Particularly important structures must be additionally checked for serviceability limit state requirements for the upper and lower bounds of residual displacements.
5. The thesis demonstrates that optimal shakedown design problems should include Eurocode ultimate and serviceability limit state requirements which are represented by individual partial factors for strength and deformability constraints.
6. The thesis shows how standardised buckling requirements of plastically deformed elements are combined with mathematical programming slackness conditions. It proves that slackness conditions contradict standard requirements and are inadequate to ensure shakedown state of a structure. To eliminate this conflict new conditions for plastic multipliers are introduced and numerically tested.
7. Frame optimization results showed that actual design of a structure at shakedown considerably differs from cyclic plastic collapse design (21.2% difference of the objective function values of models A and D in the first experiment). New conditions for plastic multipliers insignificantly increase value of the objective function: 2.7% and 2.9% in the first and second experiments respectively. In the case of truss optimization, these conditions cause slight increase in volume (2.0% and 7.8% in the first and second experiments). Such safety reserve allows evaluating stability conditions more accurately and avoiding possible collapse due to element buckling (loss of stability).
8. Numerical experiments of truss, frame and circular plate optimization problems testify that shakedown theory should be applied in practical standardized design of steel structures.

---

## Priedai<sup>1</sup>

**A priedas.** Santvaros optimizavimo programinis kodas

**B priedas.** Rėmo optimizavimo programinis kodas

**C priedas.** Plokštės optimizavimo programinis kodas

**D priedas.** Bendraautorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą mokslinę medžiagą daktaro disertacijoje

**E priedas.** Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos

---

<sup>1</sup> Priedai pateikti atskiroje elektroninėje laikmenoje

Gediminas BLAŽEVIČIUS

PRISITAIKOMUMO TEORIJOS PLĖTOTĖ OPTIMIZUOJANT  
PLIENINES KONSTRUKCIJAS

Daktaro disertacija

Technologijos mokslai,  
statybos inžinerija (02T)

EXTENDED SHAKEDOWN THEORY ON OPTIMIZATION  
OF STEEL STRUCTURES

Doctoral Dissertation

Technological sciences,  
civil engineering (02T)

2015 10 29. 13 sp. I. Tiražas 20 egz.  
Vilniaus Gedimino technikos universiteto  
leidykla „Technika“,  
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,  
<http://leidykla.vgtu.lt>  
Spausdino UAB „BMK leidykla“  
J. Jasinskio g. 16, 01112 Vilnius